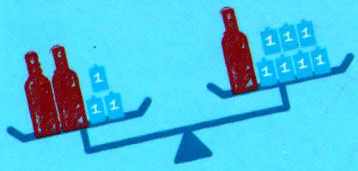


NORA CABANNE

DIDÁCTICA DE LA **MATEMÁTICA**

¿Cómo aprender? ¿Cómo enseñar?

$12^2 - 11^2 =$
$11^2 - 10^2 =$

Bonum

1. Marco teórico

A los "corazones Pitagóricos": con la esperanza de juntar, en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, rigor y sentimientos, verdades y emociones, recuperando así para el noble oficio de educar matemáticamente, la dimensión pasional que nunca debió perderse.
Claudi Alsina
en *Matemática Emotiva*

1.1 ¿Qué intenta *Didáctica de las Matemáticas*?

Didáctica de las Matemáticas no es un recetario didáctico, ni un modelo para la enseñanza, sino un intento de transmitir algunas reflexiones, producto de la experiencia y de la lectura de especialistas en el tema.

Tal vez lo que se pretende lograr es estimular "la sorpresa matemática" en el vínculo con nuestros alumnos.

Esta sorpresa se basa en provocar conceptos, demostraciones elementales, con interés, reflexión, intriga o admiración.

La tónica de las actividades es de tipo lúdico –poco frecuente en el aula de matemática, pero propio del niño y adolescente– para provocar el entendimiento... el "aprendizaje" como modificación del conocimiento.

Es responsabilidad del docente proponer "una situación adecuada" mediante una pregunta que motive las distintas "situaciones de aprendizaje", con "conocimientos anteriores"; que el alumno deberá acomodar y adecuar a las nuevas situaciones, "cuanto más acomoda, más debe valer lo que cuesta" (Guy Brousseau). Modificar el conocimiento como respuesta al medio y no como deseo del maestro es una necesidad que se convierte en una obligación de nuestra tarea.

Se pretende tomar algunos temas conceptualmente conflictivos que desde la práctica docente, resulta interesante reforzar para mejorarla. No se pretende abordar toda la problemática con la que el profesor se enfrenta en su quehacer diario, ya que ésta es muy

compleja y tiene varias aristas, que el docente debe conocer, como: **a) conocimientos, b) teorías del aprendizaje** y **c) teorías epistemológicas.**

Sí puede ser útil que nos cuestionemos el método, que será distinto al usado por el matemático, quien una vez que halla un conocimiento lo reorganiza, le da forma más general y lo comunica, descontextualizado, despersonalizado y atemporal.

El docente, según Guy Brousseau (1986): "*Realiza el trabajo inverso al del científico: una recontextualización y repersonalización del saber, busca situaciones que den sentido a los conocimientos para enseñar. Pero, si la fase de personalización ha funcionado bien, cuando el alumno ha respondido a las situaciones propuestas no sabe que ha producido un conocimiento que podrá utilizar en otras ocasiones. Para transformar sus respuestas y sus conocimientos en saber, deberá, con la ayuda del docente, redespersonalizar y redescontextualizar el saber que ha producido, para poder reconocer en lo que ha hecho algo que tenga carácter universal, un conocimiento cultural reutilizable.*"

Se ven bien dos partes bastante contradictorias del rol del maestro: hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y además transformar esa "respuesta razonable" en un "hecho cognitivo extraordinario", identificado, reconocible desde el exterior.

Es grande la tentación de saltear fases y enseñar como objetos culturales, evitando ese doble movimiento, donde el alumno se apropia como puede del conocimiento.

Hemos enunciado las distintas aristas de la tarea docente y pasaremos a analizarlas en sentido inverso a su enunciación.

1.2 ¿Qué dicen las teorías epistemológicas?

Jean Piaget presentó una **teoría coherente de la evolución del conocimiento**: *"El conocimiento pasaría de un estado a otro de equilibrio a través de un desequilibrio de transición"*, en el curso del cual las relaciones consideradas por el sujeto en el estado anterior estarían en contradicción, ya sea por la consideración de relaciones nuevas o por la tentativa, nueva también, de coordinarlas.

Esta fase de conflicto sería superada durante una fase de reorganización y de coordinación que llevaría a un nuevo estado de equilibrio.

Aplicar esta teoría al conocimiento matemático lleva a considerar que las situaciones-problema presentadas a los alumnos constituyen un factor importante para hacer evolucionar sus representaciones y sus procedimientos.

Guy Brousseau (1987) ha desarrollado al respecto la **teoría de situaciones didácticas.**

La situación didáctica implica una interacción del estudiante con situaciones problemáticas, una *interacción dialéctica*, donde el sujeto anticipa, finaliza sus acciones y compromete sus conocimientos anteriores; los somete a revisión, los modifica, los complementa o los rechaza para formar concepciones nuevas.

El objeto principal de la didáctica es estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones planteadas al alumno para favorecer la aparición, funcionamiento o rechazo de esas concepciones.

En esta *interacción dialéctica*, la noción de **obstáculo** aparece como fundamental debido a que éstos surgen en el proceso de aprendizaje por la confrontación de conocimientos que efectúa el estudianteñ; así, habrá de enfrentarlos y superarlos para lograr un conocimiento científico.

Al respecto Bachelard menciona: "*no se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano; es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una suerte de necesidad funcional para conocer... Uno conoce contra un conocimiento anterior.*"

Hay obstáculos que se presentan en el sistema didáctico, mencionados por Brousseau, cuyas causas pueden ser varias, por ejemplo, una concepción del aprendizaje; es difícil e incluso incorrecto incriminar a sólo uno de los sistemas de interacción (alumno-alumnos, alumno-docente, alumnos-contenido, ambiente físico y social). En consecuencia, los orígenes de los obstáculos didácticos estarían en el sistema, cuya modificación los evitaría.

Existen **obstáculos didácticos** de diverso origen:

Ontogénicos: éstos sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en un momento de su evolución: él desarrolla conocimientos apropiados a su medio y objetivos. Al respecto, la epistemología genética evidencia la existencia de dos instrumentos de aprendizaje: acomodación y asimilación.

De enseñanza: son los que surgen del modo en que se enseñan los conocimientos de acuerdo con un modelo educativo específico.

Epistemológicos: son dificultades intrínsecas de los conocimientos. Es posible encontrarlos en la historia de los conceptos mismos, lo cual no implica que se habrán de reproducir en situación escolar necesariamente las mismas condiciones históricas en que se han superado.

Brosseau introdujo en la Didáctica en 1976 esa noción de "obstáculo epistemológico", como un medio para cambiar el estatus del error, así fue posible mostrar que el error no es sólo producto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, como lo conciben las teorías conductistas, sino el efecto de un conocimiento anterior, que habiendo provocado interés y resultado exitoso en su momento, actúa como obstáculo para el nuevo contenido; por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución.

1.3 ¿Necesitamos los profesores de Matemática conocer las teorías del Aprendizaje?

Cuando tenemos que organizar nuestra tarea, al comienzo del ciclo lectivo, nos surgen las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el currículum que se pretende para el curso en cuestión?, ¿en qué se ha de poner énfasis?, ¿cómo se debe secuenciar la tarea?
b) ¿A qué tipo de alumnos está dirigido?, ¿qué saben?, ¿qué pueden aprender y cómo?, ¿qué necesitan?, ¿qué se puede esperar de ellos?
c) ¿Cuál será nuestro papel docente?, ¿cuál nuestra responsabilidad?, ¿qué metodología se debe poner en práctica?

Con estas preguntas y después de conocer a nuestros alumnos elaboramos una estrategia de acción. Lo que decidamos será el resultado del acierto o error en la toma y aplicación de estas decisiones.

Aunque muchos profesores crean que pueden tomar la mejor de las decisiones, sin necesidad de conocer las teorías del aprendizaje, el hecho es que, de una u otra manera, implícita o explícitamente, se adopta una teoría o combinación de ellas en la elección.

Ya que como dice Davis (1990) en "International Journal of Educational Research": *"Las teorías determinan el currículum y la enseñanza práctica, aunque es importante reconocer que las teorías, son siem-*

pre informales, ingenuas, no analizadas, implícitas y que guardan poco parecido con las teorías más formales presentadas en los libros."

Algunos se dejarán llevar por la inercia, imitación, sentido común o el libro de texto. Éste no contesta las preguntas que hacen los alumnos, ni dice cómo resolver los problemas individuales del aprendizaje.

Pero no podrán justificar lo que hacen, no podrán saber si lo hecho está bien o mal, ignorarán por qué los alumnos no aprenden y no sabrán qué será lo más interesante que puedan aprender.

Además, el discurso de los profesionales del aprendizaje se hace en función de los conocimientos de las teorías educativas y de la terminología que es importante conocer, para saber qué es lo que hay que cambiar y cómo llevarlo a la práctica.

Según lo expresado por Romberg, Price (1981): *"Frente al cambio nominal, optar por el cambio real. Y dentro de este cambio hay que lograr que no sea mecánico (adoptar rutinas sin haber captado su intención), ni ilusorio, sino constructivo. Es decir que implica comprensión y aceptación de los principios y valores que lo sostienen."*

Resumiendo, es necesario que los profesores respalden estas iniciativas didácticas con un conocimiento de los fundamentos teóricos correspondientes.

1.4 Analicemos dos modelos

Analizamos dos modelos, conductismo y cognitivismo, no porque sean las únicas teorías del aprendizaje, sino porque acogen una multitud de teorías bien diferentes, pero que presentan características comunes que nos permiten unificarlas.[1]

1.4.1 Modelo conductista

- **¿Cómo se da el conocimiento?**

El conocimiento es una acumulación de unidades o piezas aisladas, de tal modo que su almacenamiento o acumulación se toma como indicativo del nivel de conocimiento.

1. El paralelismo que se pretende analizar entre dos modelos: conductismo y cognotivismo está basado en lo expuesto por Bernardo Gómez Alfonso en el capítulo 2: "Las matemáticas y el proceso educativo", cuando habla en la página 90 de las Implicancias de las teorías en la enseñanza: dos modelos y forma parte de *Didáctica de la Matemática* de Editorial Síntesis (1991).

Es lo que se llama el "saber enciclopédico", que justifica un modelo de enseñanza basado en la asociación y fijación de ideas, gracias a la repetición.

- **¿Cómo se logra el aprendizaje?**

Se logra por mantener asociaciones o vínculos entre los estímulos y las respuestas que se estampan en la mente por repetición para arraigar un hábito.

Si el niño no aprende, el maestro dirá que es porque: no pone interés, no hace las tareas impuestas o no tiene ganas de aprender.

Entonces el maestro recetará: repetir el mismo proceso o hacer actividades complementarias, destinadas a compensar o reforzar.

- **¿Cómo juega la memoria?**

La memoria es la encargada de fijar el conocimiento, igual que se estampa una foto sobre el papel. Entonces, no existe gran diferencia entre aprendizaje y memorización del conocimiento.

- **¿Cómo se produce la instrucción?**

La instrucción consiste en verter el conocimiento en la mente del niño, como si fuera una bolsa vacía, y luego fijarlo en su mente.

Verter el conocimiento ←→ Enseñanza directa
Fijar el conocimiento ←→ Enseñanza práctica

Por eso se mandan más tareas, para sumar más trabajo realizado y por lo tanto mayor aprendizaje.

- **¿Cómo se desarrolla la clase?**

Si se parte de que todos tienen la misma capacidad para memorizar, siempre que el profesor exponga con claridad, todos pueden aprender lo mismo y al mismo ritmo.

Se agrupa a los niños por edad, se les transmite el mismo conocimiento y deben usar el mismo libro.

- **¿Cómo se utiliza el libro de texto?**

El libro de texto representa el saber apoyado por la tradición, las autoridades y la comunidad. Éste da seguridad y continuidad al conocimiento, se puede encontrar fácilmente y sólo puede asimilarse.

- **¿Tiene sentido el juego?**

El juego en el aula no está bien visto, porque se lo considera una desviación frívola de la tarea y sólo se lo reserva para el recreo.

- **¿Cómo es el rol del profesor?**

El profesor es el transmisor que vierte el conocimiento, establecido en el programa y desarrollado en el libro de texto, en la mente de los niños (como si fuera un papel en blanco).

Debe conseguir que el niño atienda, controlar el tiempo de trabajo y los ejercicios que hace y decidir cuándo debe pasar a la tarea siguiente. Este paso debe ser visto como un avance, un objetivo a conseguir, y lograrlo será una recompensa para el niño y hará que se sienta satisfecho.

Por todo esto la clase se desarrolla magistralmente, reproduciendo el libro con el mayor de los detalles y en forma clara.

- **¿Cómo se da la motivación?**

Se resuelve mediante un sistema de premios y castigos: por un lado, las medallas, los cuadros de honor, las buenas notas, la consideración del profesor; y por otro lado, las llamadas al orden, las amenazas, el informe a los padres, las malas notas, la marginación del profesor y la recriminación pública.

Así, se logra que se potencie la sumisión y el deseo de aprender para no ser reprendido, castigado o ridiculizado.

- **¿Cómo se programa?**

Como se pretende que el niño aprenda con una secuencia aditiva, es necesario jerarquizar los contenidos, planificar y no dejar nada librado al azar. Planificar los objetivos en términos de **deber**: el alumno debe conocer, debe saber, debe aplicar, debe reconocer, debe ser capaz. Luego se secuencia la enseñanza que el maestro seguirá paso a paso y llevará al alumno a la meta establecida.

Lo malo de la lista de objetivos es que no se dice cómo lograr su cumplimiento, no contiene una propuesta didáctica, no se dice en qué se fundamenta y cuál es el marco de relaciones.

- **¿Cómo se evalúa?**

En la medición del saber observable, se prioriza el éxito en las respuestas estipuladas y no se tiene en cuenta la bondad o no del

camino seguido. Mientras conteste correctamente, no importa si el niño entiende lo que hace, si será "capaz de". La evaluación por lo tanto es sencilla, ya que se cuenta el número de respuestas correctas. El número de fallas nos da el diagnóstico. Los errores indican: falta de atención, de estudio, de interés; y no son motivo de reflexión para el profesor ni se utilizan para reencauzar el aprendizaje, sino para saber a qué alumnos sancionar.

Si el maestro dice que el niño ya sabe restar, quiere decir que sabe calcular correctamente la resta, aunque no sepa lo que hace.

Por ejemplo:
$$\begin{array}{r} 42 \\ -28 \\ \hline \end{array}$$

"de 8 a 2 no puedo; de 8 a 12 hay 4 y me llevo 1", ¿de dónde el 12?; "4 y -1 de antes 3, de 2 a 3 hay 1", ¿de dónde el 1 que le resto al 4?

- **Debilidades del modelo**

➤ Es una teoría que ignora las razones del fracaso escolar y responsabiliza al alumno de su falta de preocupación por mejorar, en lugar de tratar de mejorar los métodos de enseñanza.

➤ Es ciega en cuanto a las diferencias individuales, los intereses personales, el conocimiento informal del alumno, las nuevas tecnologías, televisión, computadoras, calculadoras.

➤ No pone énfasis en lo que sólo puede hacer el hombre, como: pensar, explorar, plantear, formalizar, generalizar.

➤ Se prioriza el aprovechamiento de las destrezas y se ignora el desarrollo de las habilidades. Se aprenden procedimientos rígidos y respuestas mecánicas en lugar de respuestas más elaboradas e inteligentes.

➤ Se propende al individualismo, la sumisión, la pasividad, el conocimiento oficial, el libro de texto.

➤ No se cuestiona el conocimiento impuesto, ni el que imparte el profesor, porque es depositario del saber.

➤ Aparecen diferencias importantes entre lo que se pretende enseñar (currículum oficial), lo que se enseña (currículum implementado) y lo aprendido (currículum efectivo).

En resumen:

➤ Aprender Matemática es memorizar recetas.

➤ La comprensión juega un papel secundario.

- La incapacidad para responder con rapidez es señal de inferioridad.
- Sólo hay una manera de resolver problemas.

1.4.2 Modelo cognitivo

- **¿Cómo se da el conocimiento?**

Hay dos tipos de conocimiento, en este modelo se tienen en cuenta ambos:

a) el conocimiento espontáneo o informal, que es el que suministra el entorno y lo que el individuo piensa o cree;
b) el conocimiento formal, que es el que corresponde al currículum desarrollado, que no es lo mismo que el currículum oficial.

- **¿Cómo se logra el aprendizaje?**

El aprendizaje es un proceso de construcción interna entre los conocimientos previos y los nuevos, que logra una estructura que modifica la configuración interna.

El pensamiento del niño es distinto al del adulto y, por lo tanto, no se lo puede tratar como a un adulto pequeño, en situación de aprendizaje. Lo que se necesita es lograr relaciones y buscar aquellas que tienen significado para el niño que aprende, regresar a las ideas elementales para que, con enfoques distintos, progrese hacia formas y explicaciones cada vez más refinadas y abstractas.

- **¿Cómo juega la memoria?**

El aprendizaje es más efectivo cuando se establecen algunas relaciones significativas para el alumno.

Por ejemplo: a los niños les resulta dificultoso recordar los signos de > o <, una regla nemotécnica podría ser la siguiente:

o en la tabla del 7, recordar que 7 x 8 es lo mismo que 7 x 7 + 7

- **¿Cómo se produce la instrucción?**

En el proceso educativo se deben tener en cuenta las ideas que tiene el alumno, aprovecharlas cuando sean valiosas y modificarlas

cuando no lo sean. Por lo tanto, la instrucción debe confiar en la capacidad del niño, aprovechar sus conocimientos informales y ayudarlo a modificar puntos de vista.

La enseñanza de una operación –por ejemplo– debe comenzar con un problema, seguir con su interpretación y culminar con la aplicación de técnicas para descubrir su resolución.

Por lo tanto, la instrucción no debe estimular la memoria fotográfica, el adiestramiento o la búsqueda de respuestas automáticas, sino favorecer las relaciones o principios matemáticos, capacidad de análisis, hábitos y actitudes frente al trabajo y flexibilidad para cambiar puntos de vista. (*Didáctica de la Matemática*, edit. Síntesis).

- **¿Cómo se desarrolla la clase?**

Se presenta una situación y se propone un debate y la discusión de los alumnos, exponiendo el pensamiento y argumentando. La defensa de las propias conclusiones, la búsqueda de información para el trabajo en equipo y la interacción entre los alumnos, hace que se desarrolle la inteligencia y la capacidad de pensar. Ése es el objetivo.

Los profesores sabemos que explicando algo a otra persona, mejoramos la comprensión del tema y esto es válido para los alumnos.

- **¿Cómo se utiliza el libro de texto?**

No se usa como única alternativa, ya que por bueno que sea, no es un instrumento de validez universal, sino que hay que emprender otras actividades de distinta índole.

- **¿Tiene sentido el juego?**

Es muy valioso el juego, ya que sitúa al niño en una situación, en la que debe investigar, descubrir y construir nuevos conocimientos.

En lugar de comenzar con definiciones y seguir con ejemplos para hacer ejercicios, se proponen aplicaciones sobre las cuales los alumnos experimentan y luego progresan hacia la forma Matemática que las resume o expresa.

- **¿Cómo es el rol del profesor?**

En lugar de proporcionar estímulos para dirigir respuestas, la tarea del profesor consiste en diseñar situaciones de aprendizaje que

provoquen actividades. Estas situaciones deben ser significativas y acercarse a la manera real de aprender del alumno de su edad, a sus necesidades individuales, a su conocimiento informal; debe ayudarlo a superar los obstáculos en la construcción del conocimiento.

También, *"ayudarlo a que tenga sus propias ideas y a que decida por sí mismo, cuando hay una idea mejor"*. Kamil en *El niño reinventa la Aritmética.*

Por lo tanto el profesor, debe crear oportunidades para ejercer el razonamiento matemático, relacionar distintas áreas de información y desarrollar aptitudes de resolución de problemas.

- **¿Cómo se da la motivación?**

La motivación debe estar relacionada con el interés y curiosidad del alumno. Por lo tanto se podría empezar por un problema interesante, cuya solución requiera estudiar el tema.

Aunque no siempre hay situaciones interesantes o misteriosas a desentrañar, cuando se pueda, se debe aprovechar.

- **¿Cómo se evalúa?**

La evaluación apunta a ver los procesos y la forma de llegar al resultado: recopilar datos sobre la manera de conducirse del alumno, sobre sus éxitos y fracasos, sobre las dificultades y conflictos para encaminar la enseñanza de la mejor manera en el futuro.

- **Debilidades del modelo**

➤ La forma de medir cuantitativamente los frutos de este modelo es muy complicada en lo inmediato, ya que es un proceso.
➤ La falta de tradición en el método y las dificultades en la puesta en marcha.
➤ Falta de materiales de clase y orientaciones didácticas concretas, claras y precisas.
➤ No basta con decir que hay que acercarse a la manera de aprender del niño, sino decir cómo se hace.
➤ No basta con decir que la motivación debe ser interna, si no se dice cómo lograrla.
➤ No se puede rechazar totalmente el libro de texto y dejar al profesor indefenso.
➤ El hecho de atender a las necesidades individuales de los alumnos. Que los que son más lentos, necesitan más tiempo que los

otros; implica trabajar con menos alumnos por división y no siempre es posible en nuestras escuelas.

1.5 A la vista de los modelos, ¿qué hacemos los profesores?

La tarea de cualquier profesor de Matemática reside en enseñar Matemática. Sin embargo, cuando los alumnos no aprenden los profesores nos sentimos insatisfechos, preocupados y debiéramos preguntarnos sobre la falta de éxito; ya que hay dos posibilidades: o responsabilizamos a los alumnos o nos auto-inculpamos, cuestionando la enseñanza.

Es injusto culparse totalmente de la realidad, ya que es muy difícil ser un "buen profesor".

La enseñanza de la Matemática es muy complicada, el aprendizaje no es tarea simple, hay mucho de incertidumbre y de improvisación.

Hay razones intrínsecas de la asignatura, de la preparación del profesor, de la de los alumnos; y también razones que tienen que ver con la forma de aprender de cada persona.

Los modelos analizados nos pueden dar explicaciones de qué hacer y cómo actuar ante determinados hechos; no basta con el sentido común, las teorías son más fuertes y nos permiten explicar efectos que van en su contra.

El profesor podrá hacerse adepto a alguna de las teorías o podrá navegar entre los puntos en que esté de acuerdo con cada una de ellas, en cualquier caso es necesario que conozca las investigaciones que se han dado del tema, para luego seleccionar y organizar su enseñanza. También es cierto que los profesores están más equipados si pueden comprender cómo se ve la Matemática desde la perspectiva del que aprende.

Claudi Alsina, en la *Matemática Hermosa*, decía: "Hacer Menos para Hacer Más", que queda resumido en la tabla.[2]

En el primer bloque se hace referencia a posibles evoluciones positivas en el "cómo" trabajar las matemáticas: guiando, motivando, colaborando, globalizando.

2. El cuadro expuesto pertenece a Claudi Alsina y forma parte de una conferencia impartida por su autor en el acto de clausura de los Seminarios Internacionales de la Olimpíada Argentina y está expuesto en *La matemática hermosa... y otras conferencias*, de febrero de 2000, en la página 52.

Hacer Menos	Hacer Más
Trabajo magistral	Guía, motivación
Trabajo individual	Trabajo en grupo
Trabajo sin contexto	Aplicaciones cotidianas, globalización
Trabajo abstracto	Modelización y conexión
Temas tradicionales de ayer	Temas interesantes de hoy
Memorización instantánea	Comprensión duradera
Información acabada	Descubrimiento y búsqueda
Actividades cerradas	Actividades abiertas
Ejercicios rutinarios	Problemas comprensivos
Simbolismo matemático	Uso de lenguajes diversos
Tratamiento formal	Visualización
Ritmo uniforme	Ritmo personalizado
Evaluación de algoritmos	Evaluación de razonamiento
Evaluación cuantitativa	Evaluación cuantitativa
Evaluación de ignorancia	Evaluación formativa

En el segundo bloque se hace referencia a un abandono de lo rutinario, para dar paso a un desarrollo "inteligente".

En el tercer bloque se hace hincapié en la necesaria evolución de una evaluación absurda, obsoleta y negativa, hacia una evaluación positiva, integrada, indicativa, para incentivar mejoras.

1.6 Algunas ideas para aplicar

Hay un conflicto que los profesores de matemática debemos abordar en nuestro trabajo y que implica el desafío de conciliar dos posturas: "una, ¡no olviden a los alumnos!, y la otra, ¡en Matemática unos temas se asientan sobre otros!"[3]

Este conflicto responde a dos miradas distintas desde lo pedagógico. La primera surge de una "Pedagogía blanda", que propone bajar el nivel para que el alumno pueda alcanzar objetivos mínimos y la otra refugiándose en la secuencia lógica de contenidos y teniendo

3. Frases expuestas en *Didáctica de la Matemática* de Editorial Síntesis (1991), en la página 74, cuando habla de "otros contrastes".

en cuenta una currícula de tipo "sumativa", asegurar una enseñanza estándar y uniforme que asegure "enseñanza igual para todos".

La tarea del profesor consistirá entonces en tener en cuenta ambas posturas y en eso consiste el "arte de enseñar".

Veamos algunos ejemplos:

1) Supongamos que se debe enseñar a multiplicar, en el segundo ciclo de la EGB, números por dos cifras de la forma: 35 x 26.

Los conocimientos previos son: multiplicación por una cifra del tipo 35 x 6 y reconocimiento de las propiedades: conmutativas, asociativa y distributiva, pero se enfrenta por primera vez con esa multiplicación.

Habrá dos formas de encarar el mismo tema:

a) El profesor tradicional, aun aceptando que algún niño es capaz de realizar la transferencia, dirá que como no todos son capaces de hacerlo, será necesario graduarles las dificultades y cuando el caso inferior en complejidad se haya dominado, se pasará al siguiente paso. Primero se enseña a multiplicar por una cifra y a colocar los números de cierta manera y luego a multiplicar por dos cifras, por tres cifras, etc.:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 6 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times\ 26 \\ \hline 210 \\ 70 \\ \hline 910 \end{array}$$

y explicaría que una vez que se multiplique por 6, al multiplicar por 2, que está en el lugar de las decenas, el resultado se coloca a partir de este lugar. Una vez que haya dominado esta técnica se pasa a proponer multiplicaciones de tres cifras, del tipo: 345 x 263, de cuatro cifras, etc.

b) Un profesor no tradicional pone el acento no en el tamaño y disposición de los números, en cuanto a su disposición, sino que incentivará a los alumnos para que vayan desarrollando e integrando paulatinamente, sus conocimientos previos con el descubrimiento de nuevas reglas y propiedades, con la intención de encontrar regularidades o generalizaciones.

La propuesta puede ser: "Un maestro reparte caramelos entre los alumnos que son 35 y cada alumno tiene 26 caramelos, ¿cuántos caramelos tenía el maestro en un principio?"

Los alumnos pueden hacer varias distribuciones como las siguientes y se los alentará para que presenten más, analizando todas:

- $35 \times 26 = (30 + 5) \times (20 + 6)$
  $= 30 \times 20 + 30 \times 6 + 5 \times 20 + 5 \times 6$
  $= 600 + 180 + 100 + 30$
  $= 910$
- $35 \times 26 = 35 \times (20 + 6)$
  $= 35 \times 20 + 35 \times 6$
  $= 700 + 210$
  $= 910$
- $\underbrace{26 + 26 + 26 + \ldots\ldots + 26}_{35 \text{ veces}} = 910$
- $26 + 26 = 52$ (2 veces)
  $52 + 52 = 104$ (4 veces)
  $104 + 104 = 208$ (8 veces)
  $208 + 208 = 416$ (16 veces)
  $416 + 416 = 832$ (32 veces)
  luego suma 32 veces + 2 veces + 1 vez:
  $832 + 52 + 26 = 910$

Mientras resuelven problemas como éste, los niños se darán cuenta de lo fácil que es hacer descomposiciones distintas en órdenes de unidades diferentes y obtener procedimientos más generales.

La idea es que logren generalizar, reorganizando viejos conocimientos, reformulándolos.

2) Supongamos que debemos enseñar que "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°".

a) En la enseñanza tradicional, el profesor enunciará la generalización y quizás la ilustrará con uno o varios triángulos particulares dibujados en el pizarrón. Lo que interesa señalar es que la tarea a aprender no implica ningún descubrimiento por parte del alum-

no. Se ha de presentar la generalización y él solo debe aprenderla y recordarla.

b) En la enseñanza no tradicional, lo que debe ser aprendido no se presenta en su forma final, sino que debe ser descubierto por el alumno.

El profesor guía al niño pidiéndole que mida los ángulos interiores de varios triángulos dibujados y recortados sobre cartulina, para ver si puede formular algunas generalizaciones respecto a su suma.

En esencia la situación a aprender no se le presenta al niño en su forma final, sino que requiere emprender una cierta clase de actividades mentales antes de incorporar el resultado final a la estructura cognitiva.

1.7 Resolución de problemas

Los problemas serán considerados no como un medio para dificultar el aprendizaje en los estudiantes, sino como la mejor alternativa para ayudarlos a superar sus obstáculos y provocarlos, de ahí que se sugiere una nueva forma de plantearlos.

Teniendo en cuenta que el corazón de la matemática es la resolución de problemas, es común que éstos se planteen como relatos, habrá distintas formulaciones y resoluciones de éstos, dependiendo en la corriente de enseñanza que nos situemos.

Por ejemplo:

1) Sabiendo que la fórmula del área del triángulo es:

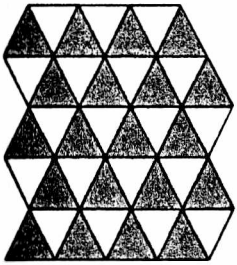
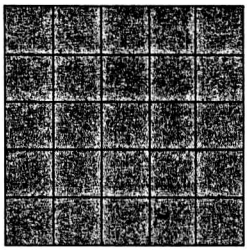
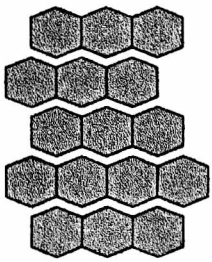
$$S = \frac{b \times h}{2}$$

y dadas la base y la altura, hallar el área, es un ejercicio de aplicación, que carece de valor significativo para el alumno.

2) Si por el contrario se le propone que determine qué figuras regulares (triángulos, cuadrados, polígonos, etc.) permiten hacer un mosaico regular, sí es un problema que puede resultarle un desafío.

Intentará probar con los distintos polígonos que conoce, haciendo coincidir sus vértices, y podrá ver que en cada vértice los ángulos serán de 360°, que estos polígonos deben ser regulares y que sus ángulos interiores son divisores de 360°. Por ello los únicos polígonos regulares posibles para recubrir el plano son: el triángulo, el cuadrado, el hexágono; cuyos ángulos interiores miden 60°,

90° y. 120°, respectivamente y que sólo hay 3 tipos de "mosaicos regulares".

Si aceptamos que resuelto un problema hemos aprendido algo, eso no significa que nos hayamos convertido en mejores resolutores de problemas en general, puede que sólo signifique que hayamos aprendido a "resolver ese problema".

"Es decir que no está claro que haya transferencia de lo aprendido en la resolución de un problema a otro, porque cada uno tiene su peculiaridad, contexto y su contenido propio. (En *Didáctica de la Matemática*, editorial Síntesis, 1991).

Polya, en su libro *Como plantear y resolver problemas* (Trillas: México, 1970), formula cuatro fases:

a) comprensión del problema
b) concepción de un plan
c) ejecución del plan
d) examen retrospectivo de la solución obtenida

El papel del profesor consiste fundamentalmente en:

- Organizar la situación didáctica de modo que el conocimiento sea planteado como un objeto de enseñanza de forma tal que pueda ser adquirido, bajo su dirección, en el proceso de aprendizaje.
- Permitir a los estudiantes aceptar la responsabilidad de resolver el problema propuesto, en un modo de funcionamiento adidáctico, manteniéndolo por medio de un proceso de confrontación y argumentación.
- Unir las adquisiciones desarrolladas durante el proceso de solución al conocimiento institucional a través de una fase de institucionalización.

Luego, el maestro debe ayudar, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que deje asumir una parte considerable del trabajo;

debe ponerse en el lugar del alumno, para tratar de comprender su punto de vista e indicar algún camino que pudiese ocurrírsele al propio alumno, "no se deben regalar respuestas".

¿Qué hacer cuando nos piden ayuda?, tal vez replantear la situación con otras preguntas, orientadoras de la búsqueda, que lleven a cuestionarse el tema y a que encuentre él la respuesta.

Recordemos que aprender es inventar, descubrir, crear "nuevos caminos" para la resolución de situaciones problemáticas.

1.8 ¿Y el currículum?

Los conceptos matemáticos se aprenden en forma progresiva, evolucionan, crecen, se desarrollan y amplían en cada período de aprendizaje.

La enseñanza de la matemática no debe ser del tipo "aplicación de recetas", ni limitarse a superar destrezas operativas, sino que debe apuntar a la comprensión de los principios y conceptos básicos, aunque sea de forma intuitiva, para luego llegar a formas más abstractas y prevenir el aprendizaje memorístico.

Por ejemplo:

Si se pretende enseñar la propiedad distributiva, el niño sabe que:

$2 \times 20 = 40$ y que $2 \times 4 = 8$ y como $24 = 20 + 4$, puede juntar esas ideas en:

$2 \times (20 + 4) = 2 \times 20 + 2 \times 4$

que es lo que se conoce como propiedad distributiva y cuya expresión literal la expresará como:

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

De esa manera podrá conectar ideas previas y llevarlas al lenguaje algebraico, reutilizándolas posteriormente.

Otro ejemplo:

Las fracciones decimales o de denominadores como potencias de 10, que suelen enseñarse en el segundo ciclo de EGB, luego se usan en otros contextos y se amplían cuando ven porcentajes, magnitudes proporcionales, estadística, etc.

Lo que no es una simple repetición del tema, sino que es un reforzamiento progresivo desde distintos contextos.

A veces se suele seguir en la enseñanza curricular, los pasos utilizados por los matemáticos para expresar sus ideas, pero esta forma presenta grandes dificultades y crea conflictos en los niños y adolescentes.

Los profesores no debemos olvidar las dificultades que se nos presentaron en el aprendizaje de los conocimientos, pese a que fueron superadas hace mucho tiempo y hoy se las ve como fáciles en apariencia. Debemos ponernos "en situación de alumnos".

2. Curiosidades Geométricas

"El universo se ofrece continuamente a nuestra mirada, pero no puede ser comprendido si primero no aprendemos a comprender el lenguaje y a interpretar los caracteres con los que está escrito. Está escrito en el lenguaje de la naturaleza y sus características son: figuras geométricas, sin las cuales resulta humanamente imposible comprender una sola palabra de él; sin ellas podemos vagar erráticamente a través de un oscuro laberinto."

Galileo Galilei

2.1 Introducción

Curiosidades Geométricas tiene como objetivo transmitir alguna intriga, sorpresa o admiración en la enseñanza de la geometría, y conducir a definiciones o demostraciones muy simples, que enriquezcan los conocimientos geométricos, a través de descubrimientos y poniendo en juego la capacidad artística y creadora.

Se pretende hacer hincapié en lo intuitivo para llevar a los alumnos hacia la adquisición de propiedades y fórmulas y no hacer una geometría construida básicamente sobre el lenguaje del álgebra.

Por lo dicho anteriormente la idea central es que el proceso de aprendizaje del alumno debe basarse en su propia actividad creadora, en sus motivaciones intrínsecas, en sus descubrimientos personales; la función del profesor debe ser la de orientador, guía, animador, pero no la de fuente fundamental de información.

Tiene sentido incluir la enseñanza de la geometría en la escuela por distintas razones:

- Porque está presente en distintos ámbitos: producción industrial, diseño, arquitectura, topografía.
- La forma geométrica representa un aspecto importante en el estudio de la naturaleza.
- Porque es un componente esencial del arte y de las artes plásticas.

- Porque es indispensable en el desenvolvimiento de la vida: para orientarse en el espacio, para hacer estimaciones sobre las formas y distancias, para hacer apreciaciones relativas a la distancia de objetos en el espacio.

Si una persona no tuvieran percepción espacial, le ocurriría lo mismo que si leyera un libro en otro idioma.

Las modernas investigaciones sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico, parecen indicar que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales del pensamiento, hasta las formas deductivas finales que corresponden a niveles escolares más avanzados.

2.2 Enseñanza de la Geometría en el primer ciclo

Según Piaget, el pensamiento Geométrico de este ciclo (6, 7 y 8 años) es de "tipo topológico", ya que es importante en esta etapa la organización y orientación del espacio alrededor de su yo.

Las tareas de orientación del espacio (proximidad, direccionalidad e interioricidad) son importantes para la evolución de la lógica en la geometría de los más chicos. Para ellos está algo desestructurada esta noción, sin forma, ni tamaños precisos, porque no tienen claro las nociones de perspectiva.

Por lo tanto en este ciclo es importante desarrollar las nociones básicas de: punto, recta, forma, superficie y volumen; sin precisar mucho las propiedades en donde se ponen de manifiesto un nivel de abstracción mayor.

Los conocimientos deben ser de tipo perceptivo, intuitivo, con alguna relación lógica, pero sin pretender una estructura lógica elaborada.

Como aspecto metodológico, se podría señalar que los dibujos y construcciones tridimensionales tienen un valor formativo en esas edades, para su posterior desarrollo de la simbolización, que es propio de niveles más avanzados.

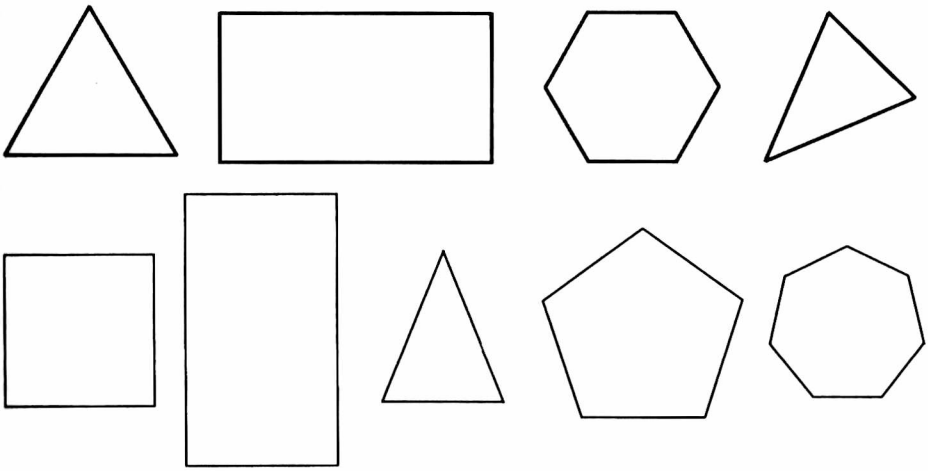
Es importante plantear el punto como vértice, como elemento de una red plana, de una figura, de un cuerpo; la línea como arista, como intersección de dos superficies; la superficie como parte de un volumen.

2.2.1 Algunas ideas, actividades y problemas del primer ciclo (no secuenciadas)

I. Reconocimiento de figuras geométricas

Materiales:

Plancha de cartulina con los dibujos que están a continuación (que los alumnos puedan recortarla).



Propuesta al alumno:

Observa las figuras de la plancha y contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué figuras aparecen?, escribe sus nombres.
- ¿Cuántos triángulos hay?, ¿cuáles son sus características?
- ¿Cuántos cuadriláteros hay?, ¿cuáles son sus características?
- ¿Cuánto miden los ángulos de estas figuras?, ¿y los lados?
- ¿Puedes comparar esos datos?
- ¿Cuáles tienen lados paralelos?, ¿y cuáles perpendiculares?

Comentario:

Con esta actividad se pretende que los alumnos identifiquen las figuras en el plano y recuerden las características más evidentes: nombre, número de lados, número de vértices y de ángulos; que comparen lados y ángulos; que tengan en cuenta paralelismo, perpendicularidad e incidencias.

II. Triángulos

Materiales:

Una trama cuadrada como la que figura en la parte inferior de la página y lápices de colores.

Propuesta al alumno:

- Trata de unir puntos para formar triángulos de distinto tipo.
- Toma un triángulo cualquiera y elige otro que se le parezca, ¿en qué se parece?
- ¿Hay triángulos con 2 lados iguales?, si no hay, constrúyelo.
- ¿Cómo es el otro?, ¿puede ser de otra manera?
- Dibuja sobre el papel un lado de uno de los triángulos y a continuación los demás del mismo triángulo, sobre la misma recta, ¿qué obtienes?

Comentario:

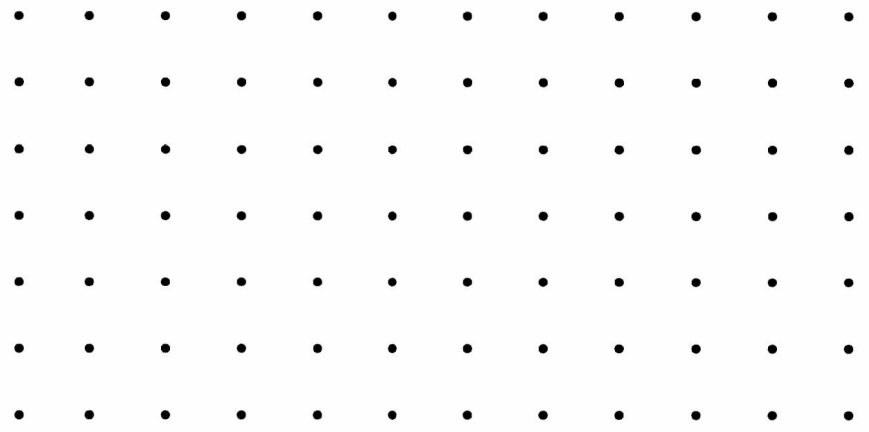
Lo que se pretende es que tengan un criterio de clasificación de los triángulos.

Por ejemplo: tiene 2 lados iguales, 3 lados iguales, 3 lados distintos.

Habría que hacer notar que hay figuras que no pueden hacerse.

También se pretende que sumen los segmentos obtenidos y que lleguen empíricamente al concepto de perímetro.

Trama cuadrada



III. Juego por parejas

Material:
Una hoja y lápices.

Propuesta al alumno:

1) Dibujen un montón de puntos sobre la hoja dispuestos al azar. Cada uno, por turno, dibuja una línea entre dos puntos. No vale cruzar líneas. Pierde el juego el primero que se vea obligado a cerrar la línea.
2) Si sólo hacen 5 puntos, ¿cuál es el máximo número de líneas que se puede trazar sin que aparezca una línea cerrada?
3) Repetir con 6, 7, ...puntos y registrar en la siguiente tabla:

5	.....
6	.....
7	.....
8	.....
9	.....
10	.....

Comentario:
En la 1) se pretende desarrollar la noción de líneas, tipos de líneas, líneas cerradas, figuras geométricas, polígonos; y en la 2) pensar en una regularidad del tipo "número de puntos menos uno".

IV. Elementos geométricos básicos

Materiales:
La trama cuadrada (usada anteriormente) y lápices de colores.

Propuesta al alumno:
Sobre la trama marca 2 puntos y nómbralos A y B.

- Busca el camino más corto entre ellos.
- Busca el camino más largo entre ellos, pero pasando por algún punto de la trama una sola vez.

- En la trama anterior contamos el número de cruces que hay (número de segmentos) entre 2 puntos y el número de regiones (formadas por líneas cerradas).
- Señala cuáles son los puntos de intersección y cuántas rectas pasan por él.
- ¿Cuántos segmentos aparecen?
- ¿Cuántas regiones aparecen?

Comentario:

Se pretende introducir: líneas, intersección de líneas, segmento, puntos de intersección, redes poligonales, relaciones entre puntos, rectas y regiones de la trama.

V. Reconocimiento de figuras en el espacio

Material:

Se entregan en una hoja dura dibujados: 6 triángulos equiláteros iguales entre sí, 8 cuadrados iguales entre sí, 4 rectángulos iguales entre sí y gomitas.

Propuesta al alumno:

Recorta las figuras entregadas.

- ¿Qué piezas tienes?,¿qué formas tienen?
- ¿Hay piezas iguales?, ¿tienen lados iguales?, ¿tienen ángulos iguales?
- Si quieres unir 2 ó más piezas haciendo coincidir los lados, ¿qué puedes obtener?
- ¿Conoces el nombre de estas figuras del espacio?, si no averígualos.
- Trata de describirlas.

Comentario:

Se pretende presentar las figuras del espacio, hablar de los elementos que las definen: lados, aristas, superficies, caras, punto, vértice.

Construir figuras en el espacio (se puede hacer una como muestra).

VI. Relaciones de figuras en el espacio

Material:

Se entregan en una hoja dura dibujados: 6 triángulos equiláteros iguales entre sí, 8 cuadrados iguales entre sí, 4 rectángulos iguales entre sí y gomitas.

Propuesta al alumno:

Trabaja en grupos de 4 personas. Recorten las figuras entregadas.

Con las figuras planas anteriores y las gomitas, traten de construir cuerpos en el espacio, todos los que puedan, ¡tengan cuidado de no curvar las caras! Pregúntate y responde:

- ¿Cuáles son las paredes?, ¿qué formas tienen?, ¿qué partes componen el cuerpo?
- ¿Cómo son los bordes o aristas?, ¿y los picos o vértices?
- ¿Cuántas caras, aristas y vértices tienen cada una?
- Con los datos anteriores, realiza un cuadro como el siguiente:

Cuerpo	N° de caras	N° de aristas	N° de vértices

- ¿Puedes sacar conclusiones?

Comentario:

- Se pretende que adquieran nuevos términos: arista (como intersección de superficies o caras), vértice (como intersección de aristas). Relación entre vértices, aristas y caras en los cuerpos geométricos.
- Si en la construcción no apareció ninguna figura cóncava, se puede sugerir que se construya, mostrando alguna ya hecha. Este concepto suele aparecer en forma espontánea en la construcción y sin embargo es difícil de entenderlo fuera de ese contexto.
- No es necesaria ninguna definición, aunque puede ayudar hacerles observar que en esta figura hay caras que, si se prolongan, cortan a las figuras en 2 trozos. Se les puede dar una definición sencilla de cada figura del espacio.

- Es importante que los alumnos hagan una lista con los nombres de las figuras del espacio que construyeron y una descripción (esto ayuda a fijar los nuevos conceptos aparecidos).
- Se puede hacer notar la noción de ángulo de cada figura y de ángulo del diedro en construcción, cuando está todavía incompleto.

2.3 La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo

Este ciclo abarca los niños de 9, 10 y 11 años y se considera como adecuado la enseñanza de "una geometría descriptiva", en donde se estudian figuras y cuerpos geométricos en simultáneo y las figuras como partes de cuerpos.

Es decir estudiar al mismo tiempo: triángulos y tetraedros; cuadriláteros y prismas.

Se recomienda la descripción de las caras de los cuerpos y de ellos mismos destacando las relaciones más significativas y propiedades más notorias.

Según Piaget, no es aconsejable todo lo referente a las medidas en este ciclo, porque requiere de estructuras lógicas más profundas.

A las formas geométricas es importante presentarlas de manera dinámica, con distintas formas y distintas posiciones, para evitar que se fijen nociones incorrectas como la del triángulo isósceles en posición vertical.

También estas formas geométricas, como integrantes de cuerpos y sus movimientos en el espacio.

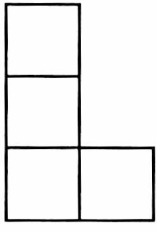
Es esperable que se reconozcan las regularidades, simetrías y rotaciones de las formas geométricas que luego inducen a propiedades importantes.

2.3.1 Algunas ideas, actividades y problemas del segundo ciclo (no secuenciadas)

I. Generar figuras geométricas

Materiales:

Construir diversas piezas de cartulina en forma de L, como las de la figura:



Propuesta al alumno:

Trabaja en grupos de 4. Trata de combinar las piezas para construir:

1) Con 2 L, formar un rectángulo, ¿hay una sola posibilidad?
2) ¿Con cuántas L se puede construir un cuadrado?
3) ¿Con cuántas L se puede construir una L mayor?

Comentario:

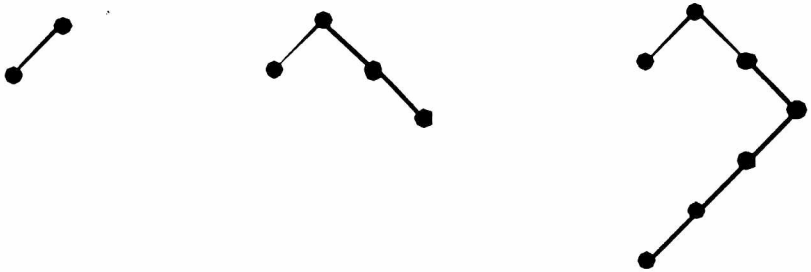
El objetivo es que el alumno, manipulando esa figura, genere distintas formas geométricas con el mínimo número posible de piezas iguales y analice las distintas formas que se puedan encontrar.

II. Actividades de inducción

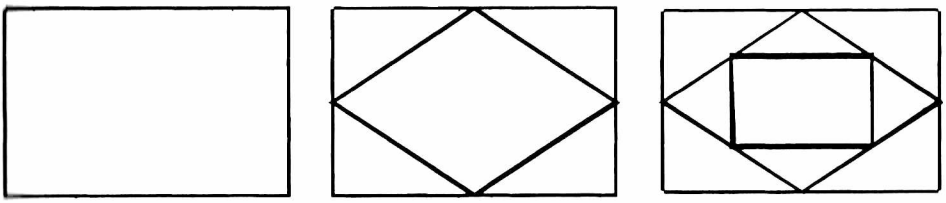
Materiales:

Trama isométrica y papel cuadriculado (ambos figuran en la siguiente página).

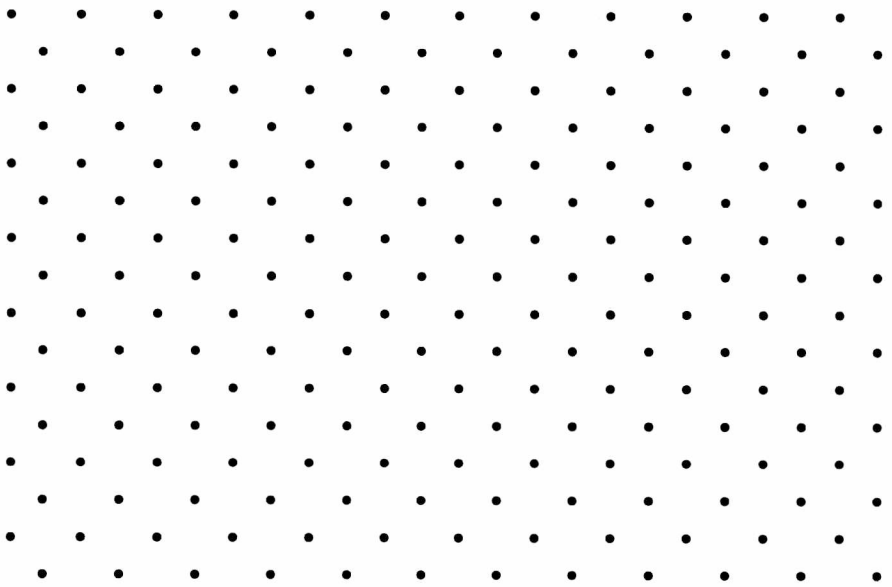
1) Con la trama isométrica, trata de reproducir los dibujos y añade uno o dos más.



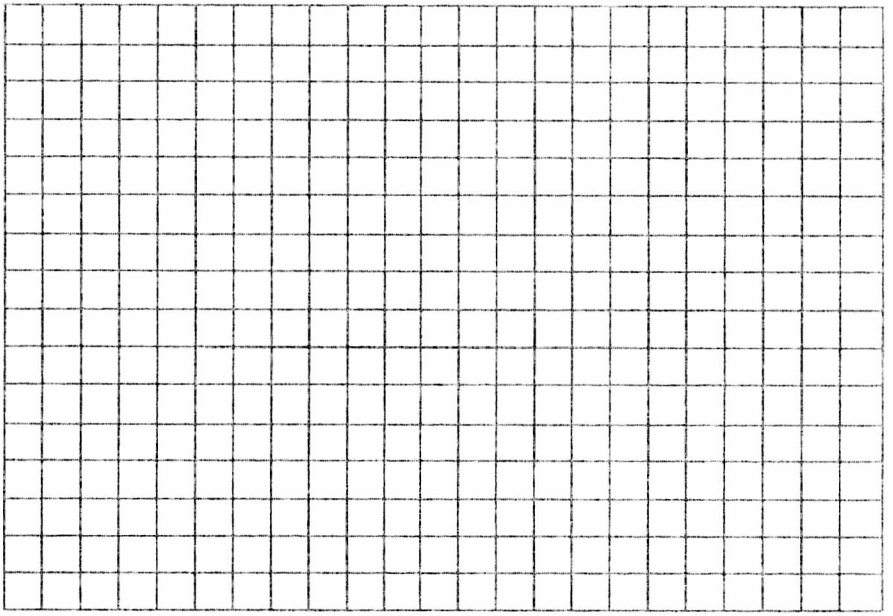
2) Con el papel cuadriculado trata de reproducir las siguientes figuras y añade una o dos más.



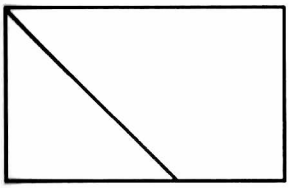
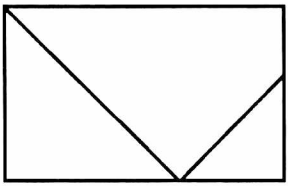
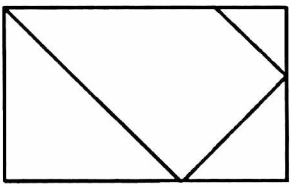
Trama isométrica



Papel cuadriculado



3)· Con el papel cuadriculado trata de reproducir las siguientes figuras y añade una o dos más.

Comentario:

- Esta actividad es de inducción: se pretende inducir con la observación de las figuras, aprovechando la intuición del niño, para sacar alguna conclusión.
- Razonando con estas evoluciones, al aumentar las complejidades, el número de lados, pasar a la dimensión siguiente.
- Es común "inducir" propiedades generales a partir de verificar ciertos casos particulares. Si bien se trata más de una generalización, que no de inducir una propiedad, dicho proceso es importante para razonar ejemplos más difíciles, más interesantes.

III. Inducción con líneas

Propuesta al alumno:

- Traza dos líneas rectas, ¿cuántos puntos de intersección se pueden obtener con ellas?
- ¿Con tres?, ¿con cuatro?
- Completa una tabla como la siguiente con los datos obtenidos:

N° de líneas	N° de interserccciones
2	
3	
4	
5	
6	
10	

- ¿Notas alguna regularidad?, trata de expresarlo con tus palabras.

Comentario:

- Los alumnos deben ser capaces de hallar todos los valores propuestos en la tabla.
- La solución posible es:

N° de líneas	N° de interserccciones
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
10	55

- Intersecciones con 3 líneas = 1 + 2 = 3
- Intersecciones con 5 líneas = 1 + 2 + 3 + 4 = 10
- Intersecciones con 6 líneas = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
- Intersecciones con 10 líneas = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 55
- Podrán sacar como conclusión: que cada término de la segunda columna, resulta de la suma de todos los anteriores a ese número.
- Es decir al del lugar "n", le debo sumar los "n-1" anteriores.
- Más adelante (en ciclos superiores) podrán llegar a la fórmula general:

  I (n) = Intersecciones con n líneas = $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$

  esta expresión no es aconsejable en este nivel.

IV. Inducción con regiones

Propuesta al alumno:

Si tienes una tarta y la divides con cortes rectilíneos, e iguales al diámetro, analiza:

- ¿Cuántas regiones se pueden obtener con un corte que se le haga a ella?
- ¿Con tres?, ¿con cuatro?
- Completa una tabla como la siguientes con los datos obtenidos:

N° de líneas	N° de regiones
1	
2	
3	
4	
5	
6	
10	

- ¿Y para 100?
- Trata de sacar una regla general. Explícalo con tus palabras.
- ¿Lo puedes escribir con letras?

Comentario:

Se trata de un conjunto creciente de líneas (los cortes), pero ahora son segmentos que dividen una región (la tarta), en partes también crecientes en número, la resolución es parecida a la anterior, aunque más sencilla y puede llevar a la generalización 2n.

V. Rectas paralelas y por extensión perpendiculares

Materiales:

Trama cuadrada, palillos de dientes, hojas de papel.

Propuesta al alumno:

- En la trama cuadrada marca dos puntos y dibuja rectas que pasen por ellos, luego por tres puntos, por cuatro puntos, etc.
- ¿Cuáles están alineados?, ¿cuáles no se cortarán nunca?
- Con los palillos de dientes realiza figuras, cada una con dos palillos, haciendo coincidir un punto o ninguno.
- Con tres palillos lo mismo, haciendo coincidir en un punto o en ninguno.

Comentario:

- La idea de esta actividad es remarcar los conceptos de rectas paralelas.
- Generalizar la noción de paralelismo, al caso tridimensional y pedir en cada caso el máximo número de rectas paralelas.
- Considerar luego las intersecciones entre superficies planas;

introducir "el paralelismo de superficies planas por ser vacía la intersección", y pedir el número máximo de superficies planas paralelas en cada caso.

- Generalizar la noción de paralelismo, al caso de relaciones entre una línea recta y una superficie plana en el espacio y pedir el máximo de líneas rectas paralelas a una superficie plana o al revés, de superficies planas a una recta también en cada caso.
- Se puede hacer una actividad semejante para enseñar ángulo recto y líneas perpendiculares.

VI. Triángulos

Materiales:
Palillos de dientes.

Propuesta al alumno:

- Construye un triángulo equilátero, de lado un palillo, de lado dos palillos,... ¿cuántos palillos hacen falta en cada caso?
- Realiza una tabla y vuelca estos datos:

N° de palillos	N° total de palillos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
10	

- Construye con tres palillos un triángulo, luego con cuatro, con cinco, ...y así hasta doce palillos. Recuerda que cada lado puede estar formado por varios palillos.
- Lleva tus datos a una tabla como la que sigue:

N° de palillos	Combinación de lados
3	(1,1,1)
4	(1,1,2)
5	(1,2,2)
6	
7	
8	
12	

- ¿Qué tipos de triángulos obtuviste con las distintas combinaciones de palillos?
- ¿Por qué con algunos no se puede formar triángulo?
- ¿Qué relación debe darse entre cada lado y la suma de los otros dos?
- ¿Qué relación debe darse entre cada lado y la resta de los otros dos?
- ¿Qué relación debe darse entre cada lado y la suma de los otros dos?

Comentarios:

- Hacer notar que la terna (2,3,4) es el primer escaleno y que la terna (3,4,5) es el único rectángulo.
- Propiciar preguntas del tipo:
  ¿Puedes construir triángulos con un ángulo recto?, ¿con dos rectos?, ¿cómo son los otros dos?
- ¿Puedes construir triángulos con un ángulo obtuso?, ¿con dos?, ¿cómo son los otros dos?
- ¿Puedes construir triángulos con un ángulo agudo?, ¿con dos?, ¿cómo son los otros dos?
- ¿Puedes construir un triángulo equilátero y rectángulo?
- ¿Puedes construir un triángulo isósceles y rectángulo?, ¿cuántos hay?
- ¿En un triángulo rectángulo, qué le pasa al otro ángulo cuando uno de sus ángulos crece?
- ¿Y en un triángulo obtusángulo?, ¿y en uno isósceles?, ¿y en uno equilátero?

VII. Cuadriláteros, lados y ángulos

Materiales:
Palillos de dientes.

Propuesta al alumno:

- Con cuatro palillos construye un cuadrilátero, luego con cinco, con seis, ...Hay que tener en cuenta que cada lado puede estar formado por varios palillos.
- ¿Cuántos palillos en los lados tienen estas figuras?
- ¿Qué tipos de cuadriláteros obtienes con todas las combinaciones de palillos?

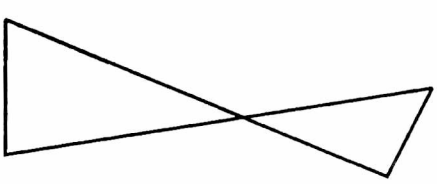
- Con 4: (1,1,1,1)
- Con 5: (1,1,1,2)
- Con 6: (1,1,1,3) (1,1,2,2)
- Seguir así hasta con 16 palillos.
- ¿Cómo se llaman los cuadriláteros al variar la medida de los lados?, ¿y de los ángulos? Realiza una tabla de doble entrada, del tipo:

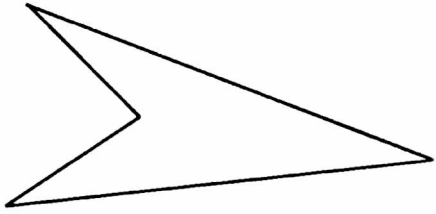
	4 lados iguales	Lados 2 a 2 iguales	Otros casos
4 ángulos iguales Ángulos 2 a 2 = Otros casos			

- ¿Por qué con algunos no se puede formar cuadrilátero?, ¿qué relación debe darse entre los lados?
- ¿En los cuadriláteros, qué relación hay entre lados y ángulos opuestos?

Comentario:

- Propiciar la construcción de distintos cuadriláteros convexos y cóncavos, del tipo diábolo o punta de flecha.





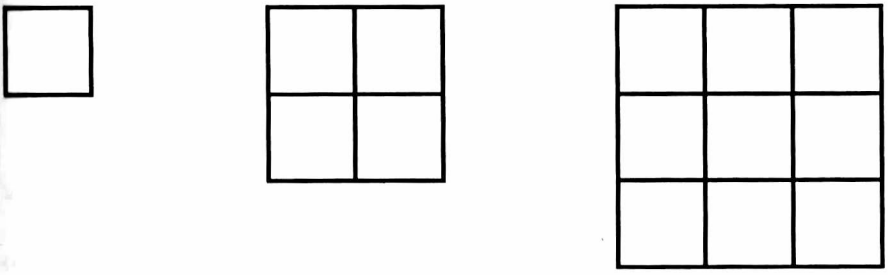
- Propiciar preguntas del tipo: ¿puedes construir cuadriláteros con un ángulo recto?, ¿con dos rectos?, ¿cómo son los otros?
- ¿Puedes construir cuadriláteros con un ángulo agudo?, ¿con dos agudos?, ¿cómo son los otros tres?

VIII. Cuadrados

Materiales:
Palillos de dientes.

Propuesta al alumno:

- Construye con palillos de dientes, cuadrados de un palillo de lado, otro de dos palillos y dentro de éste cuatro de lado un palillo.



- Construye otro cuadrado de tres palillos de lado y que en su interior tenga nueve cuadrados de un palillo de lado.
- Vuelca tus datos en una tabla como la siguiente:

N° de lados	N° de cuadrados	N° de vértices
1	1	4
2	4	...
3	9	...
4	...	...
5	...	...
...	...	...
...	...	...
10	...	...

- Escribe con palabras una regla que te permita calcular el número de palillos que tiene cualquier figura a partir del lugar que ocupa.
- Escribe la regla en símbolos.
- ¿Habrá alguna figura que esté formada por 1200 palillos?, ¿cuál? ¿Y con 31000 palillos? Justifica tus respuestas.

Comentario:

- Da lugar a la aparición de números cuadrados, lo cual sirve para la aritmética, al intentar calcular el número total de cuadriláteros y de vértices.
- Ligados a las redes cuadradas, aparecen de manera natural, los

números cuadrados que obtienen así un doble significado, aritmético y geométrico.

- La del número de cuadrados es más sencilla, ya que nos lleva a la generalización n^2.
- La del número de vértices es más elaborada, ya que es de la forma: $(n + 1)^2$.

IX. Mosaicos

Los suelos de cocinas o de baños, poseen formas muy variadas y decorativas, que se denominan mosaicos.

Pero ¿qué es un mosaico matemático?: Un mosaico matemático es una forma de recubrir un plano combinando polígonos de modo que no se superpongan, ni queden huecos entre ellos.

Materiales:

Seis triángulos equiláteros, seis cuadrados, seis hexágonos, seis octógonos, seis dodecágonos, realizados en cartulina y de iguales lados entre sí.

Propuesta al alumno:

1) Trata de construir un **mosaico regular**, que es aquel que para su construcción utiliza un solo tipo de polígono regular, con todos sus vértices en contacto.

- Con todos los polígonos regulares de un solo tipo (triángulos, o cuadrados, etc.) que tienes, trata de construir el mosaico regular.
- Dibuja todos los que consigas.
- ¿Cuántos son?, ¿por qué será?

2) Un **mosaico es semi-regular**, si para su construcción se utilizan dos o más tipos de polígonos regulares, de modo que en todos sus vértices existe el mismo tipo de polígonos y el mismo orden.

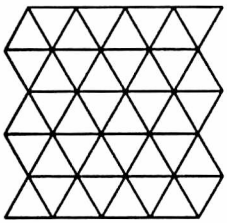
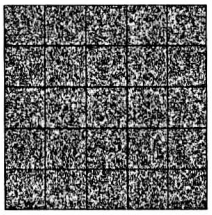
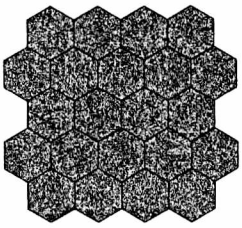
- ¿Puedes hacer alguna combinación de figuras con ellos?
- Dibuja lo que consigues.
- Explica por qué puedes hacer coincidir estos en el mismo vértice.

Comentario:

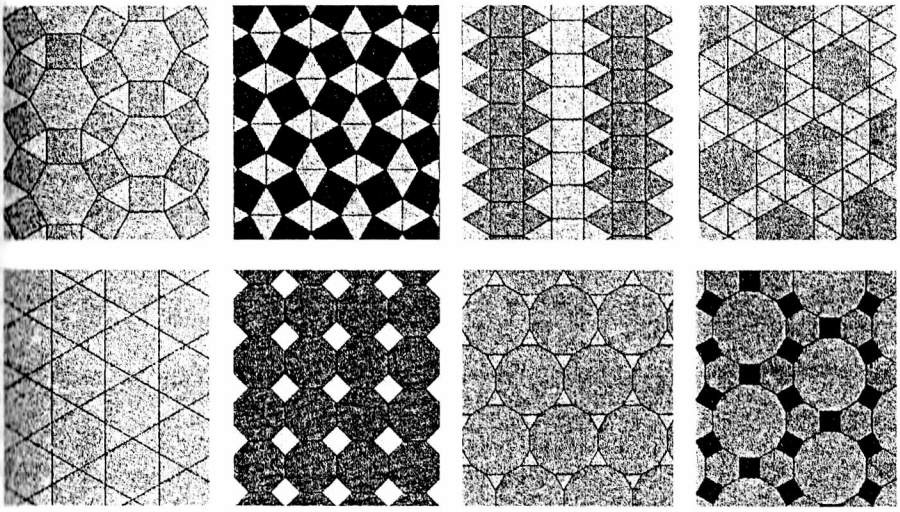
- La actividad 1) sólo la pueden construir con: triángulos, cuadrados y hexágonos, ya que sus ángulos interiores son de 60°, 90° y

120°, respectivamente, que son divisores de 360°, que es un giro completo en el vértice.

- Luego se obtienen los siguientes mosaicos regulares:

- La actividad 2) sólo admite ocho tipos de mosaicos semiregulares que son los siguientes:



X. Construcción de poliedros

Materiales:

Disponer de 5 polígonos regulares iguales que sean cuadrados, triángulos equiláteros, pentágonos y hexágonos (en cartulina y para recortar). También, gomitas.

Propuesta al alumno:

- Construye poliedros con un solo tipo de polígonos regulares, por ejemplo: con triángulos, con cuadrados, con pentágonos...
- ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden concurrir en un vértice como mínimo?
- ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden concurrir en un vértice como máximo?
- En un vértice del poliedro, ¿cuánto suman los ángulos de los polígonos que concurren en él?, ¿es mayor, menor o igual a 360°?
- Realiza lo de arriba con los cuadrados y contéstate esas preguntas.
- Realiza lo de arriba con los pentágonos y contéstate esas preguntas.
- Realiza lo de arriba con los hexágonos y contéstate esas preguntas.
- Construye la siguiente tabla, después de construir los poliedros:

Poliedros con caras	**N° de polígonos por vértice**	**Cantidad de polígonos**	**Nombre del poliedro**
Triangulares			
Cuadrados			
Pentágonos			
Hexágonos			

- Para cada poliedro, completa en la tabla: la cantidad de caras, el número de vértices, número de aristas. Luego suma la cantidad de caras, numero de vértices, réstale el número de aristas y coloca este resultado en la última columna de la tabla. ¿A qué conclusión llegas?

Poliedros	**N° de caras (C)**	**N° de vértices (V)**	**N° de aristas (A)**	**C + V - A**
Triángulos				
Cuadrados				
Pentágonos				
Hexágonos				

Comentario:

- Sería interesante llevar los polígonos regulares (pedidos en los materiales) en cartulina recortable.
- Es importante que cada conclusión se vaya escribiendo en la pizarra.
- Para cada poliedro, en un vértice deben concurrir al menos tres caras.
- Para formar un vértice hay que juntar un n° de polígonos tal que la suma de los ángulos interiores sea menor que 360°.
- Se pueden construir poliedros regulares con tres, cuatro o cinco triángulos equiláteros en cada vértice, no más, ya que con seis en un vértice es plano.
- Sólo se puede construir un poliedro regular. Con cuadrados, poniendo tres en cada vértice, luego queda plano.
- Sólo se puede construir con pentágonos colocando tres en cada vértice.
- Con polígonos regulares de mas de cinco lados, no se pueden construir poliedros.
- La conclusión de la actividad del último cuadro es la de Euler:

  caras + vértices = aristas + 2

  Esta actividad realizarla sólo si el profesor lo cree conveniente, si no, retomarla en el ciclo siguiente y en ese momento discutirla.
- Sería conveniente que los alumnos construyeran los cinco poliedros regulares como tarea.

2.4 La enseñanza de la Geometría en el tercer ciclo

Lo predominante en la enseñanza de la Geometría de este ciclo (12, 13 y 14 años) es centrarla en "la geometría de las imágenes".

A partir de la inspección de objetos geométricos reales y tangibles tratar de conceptuar imágenes más abstractas.

El enfoque actual difiere del tradicional, en cuanto a la enseñanza de la geometría, ya que antes se hacía uso temprano de abstracciones al utilizar los axiomas euclideanos (no muy comprendidos por los púberes).

En una primer etapa los alumnos podrán reconocer figuras elementales y efectuar construcciones, que paso a paso permitirán ir

manejando objetos geométricos más complejos.

Estas actividades deberán ser planeadas y orientadas a facilitar la observación de propiedades geométricas que pueden inducir a más generalizaciones.

Llegado al punto en que los alumnos dispongan de todos los elementos necesarios para dar el siguiente paso, será fundamental no apresurarse en arribar a conclusiones, sino fomentar la reflexión individual y la discusión de las mismas en grupos.

Sin duda que será importante concluir con los conceptos generales (por ejemplo una clasificación), pero será mejor realizar los mayores esfuerzos analíticos, deductivos e inductivos en este proceso.

Cuando se logra obtener esta dinámica, los alumnos suelen aceptar con entusiasmo, consignas de tipo lúdico que llevarán a efectuar por sí mismos las primeras deducciones.

2.4.1 Algunas ideas, actividades y problemas del tercer ciclo (no secuenciadas)

I. ¿Perímetro o área, de qué estamos hablando?

Materiales:
Trama cuadrada y regla.

Propuesta al alumno:

- Construye seis figuras distintas uniendo ocho puntos de la trama de forma tal que:
  a) los puntos sean consecutivos y no en diagonal,
  b) al dibujar no debes levantar el lápiz, ni pasar por encima de una línea ya dibujada.
- Mide el perímetro de las seis figuras y anótalos en la tabla, ¿qué observas?

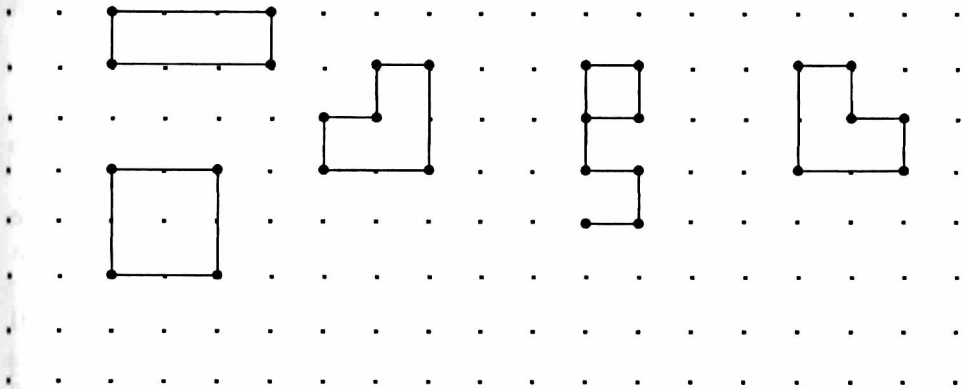
Figura	Perímetro	Área
1		
2		
3		
4		
5		
6		

- Mide el área de cada figura, completa la tabla anterior, ¿qué observas?
- ¿Cómo tienes que hacer para obtener una figura de área mayor?
- ¿Cómo tienes que hacer para obtener una figura de área menor?
- ¿Observas alguna relación entre perímetro y área?
- ¿Qué conclusión puedes sacar, que relacione el perímetro y el área?

Comentario:

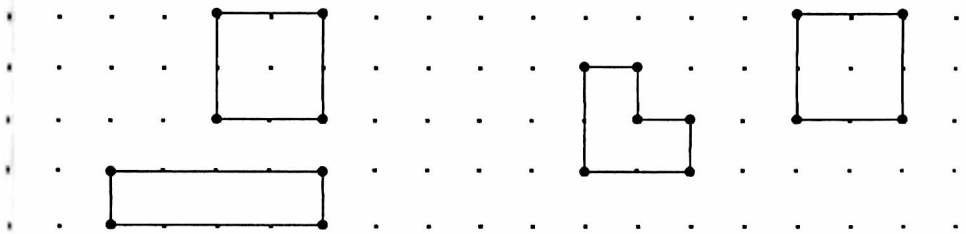
- Es importante resaltar que el perímetro en todos los casos es igual, no así el área.
- Se deben dibujar todas las figuras distintas que hayan aparecido e incluso otras que puedan ayudar a aclarar ideas.

Algunas posibles formas serán:



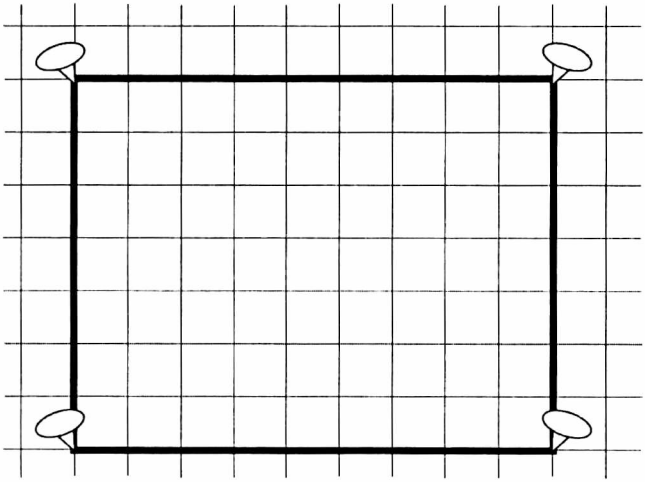
Igual área y distinto perímetro

Distinta área e igual perímetro



II. Rectángulos de área mayor

Materiales:
Cuadrícula de 1 cm, trozo de hilo de más de 32 cm.



Propuesta al alumno:

- Con el trozo de hilo, ata los extremos, dejando dentro un trozo de 32 cm exactamente y sujetando la cuerda con 4 chinches forma un rectángulo sobre la cuadrícula.
- Forma el rectángulo de tal manera que uno de sus lados sea 10 cm. ¿Cuánto vale el perímetro? ¿Y el área?
- Mueve las chinches y forma otro rectángulo con 8 cm en uno de sus lados. ¿Cuánto vale el perímetro? ¿Y el área?

Lados del rectángulo	Perímetro	Área
Con un lado de 10 cm		
Con un lado de 9 cm		
Con un lado de 8 cm		
Con un lado de 7 cm		
Con un lado de 6 cm		

- ¿Puedes enunciar una conclusión, en cuanto a la relación del perímetro y el área?

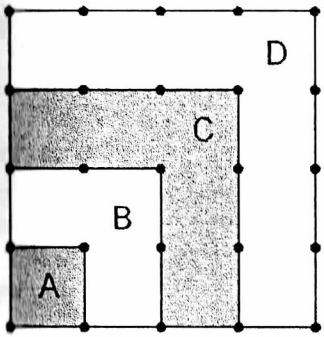
Comentario:

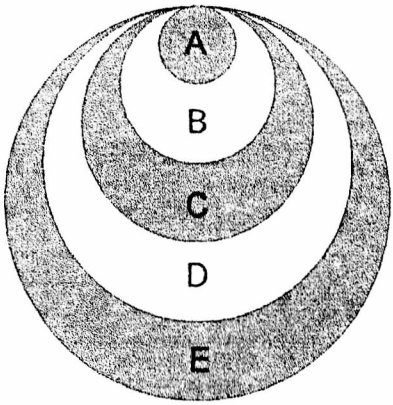
- Es importante resaltar que el perímetro en todos los casos es igual.
- Se deben dibujar todas las figuras distintas que hayan aparecido e incluso otras que puedan ayudar a aclarar ideas.
- Pueden aparecer rectángulos cuyos lados sean números decimales.
- La última pregunta es la más difícil, pero la tabla puede llevar a concluir que la de mayor área es el cuadrado.

III. Longitud y área, ¿son proporcionales?

Materiales:

Trama cuadrada con cuatro cuadrados de 1, 2, 3 y 4 de lado y 5 círculos de 1, 2, 3, 4 y 5 de radio.





Propuesta al alumno:

1) **Lado - cuadrado**

- ¿Qué relación hay entre la medida del lado del cuadrado A y la del B?
- ¿Y entre las medidas del área de los cuadrados A y B?
- ¿Qué relación hay entre las medidas de los lados de A y C?, ¿y de A y D?
- ¿Y entre las medidas de las áreas de los cuadrados A y C?, ¿y de las de A y D?
- ¿Son iguales estas relaciones (entre lados y áreas)?
- Completa la siguiente tabla:

Figura	Long. lado	Área cuadr.
A	1	
B	2	
C	3	
D	4	

- El lado de D es 2 veces el de B, ¿ocurre lo mismo con sus áreas?
- Son proporcionales las longitudes de los lados y las áreas de los cuadrados.

2) **Diámetro - círculo**

- ¿Cuál es la relación entre los radios de las circunferencias de A y C?
- ¿Cuál es la relación entre las longitudes de las circunferencias de B y D?
- ¿Cuál la relación entre las áreas de los círculos A y C? ¿y el B y D?
- ¿Son iguales estas relaciones?
- Completa la tabla siguiente:

Figura	Long radio	Longitud de circunferencia	Área del círculo
A	1		
B	2		
C	3		
D	4		
E	5		

- ¿El radio de C es el triple de A?, ¿qué ocurre con las longitudes de los círculos?, ¿y con las áreas?
- ¿Son proporcionales las longitudes de los radios y las longitudes de las circunferencias?, ¿y las longitudes de las circunferencias, con las áreas?

Comentario:

1) Observando las figuras, los alumnos deben concluir que no hay proporcionalidad entre longitudes y áreas, para después comprobarlo en todos los casos en la tabla.

- La proporcionalidad que existe entre longitudes de A y B es 1/2, y si se eleva al cuadrado en caso de las áreas (1/4).
- La proporcionalidad entre A y C es 1/3 y entre sus áreas es 1/9.

2) Siguiendo el método anterior, se llega a completar la segunda tabla en la que se observa que se mantiene la proporcionalidad en las longitudes de la circunferencia, pero no en las áreas del círculo.

La proporcionalidad entre los radios de C y A es 3 cm a 1 y se conserva en las longitudes de las circunferencias que son de 6π y 2π, es decir es 3; en cambio en cuanto a las áreas de los círculos es 9π a π, o sea 3^2 veces π.

IV. ¿Es chico o grande?

Materiales:

Plano de un departamento, con escala como el siguiente y regla graduada.

Propuesta al alumno:

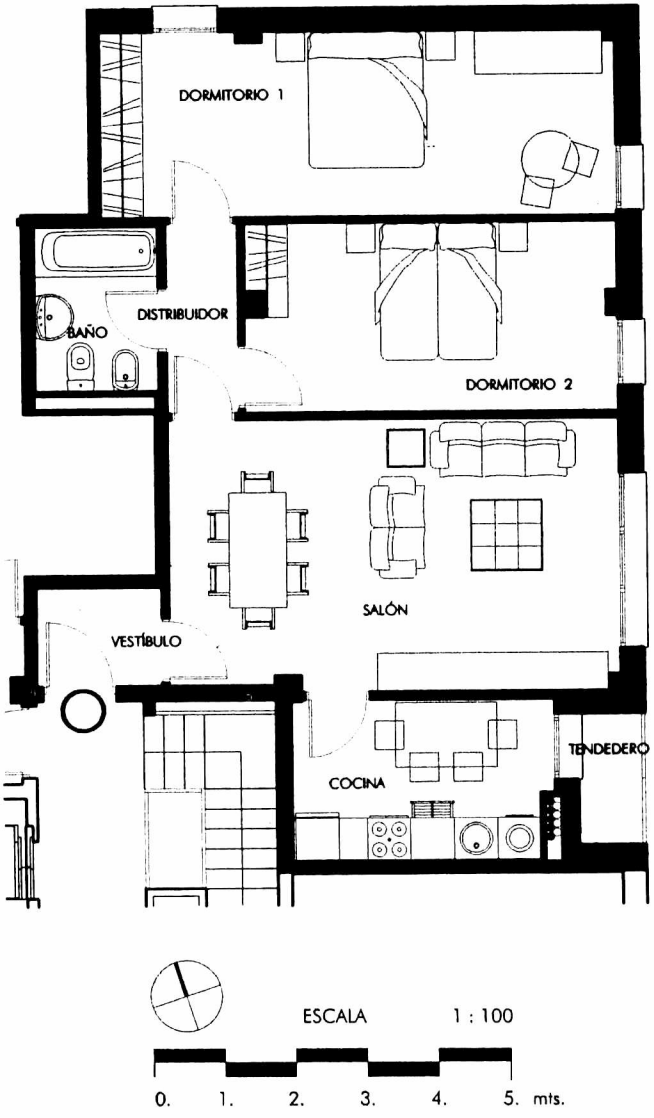
Habrás visto muchos planos como éste en las publicidades de venta de departamentos. Son útiles para hacerse una idea rápida de cómo es la casa, pero si no tenemos referencias, no podemos saber sus dimensiones.

A veces aparentan entrar todos los muebles dibujados, pero realmente:

¿cuáles serán las dimensiones reales?

Te invito a que observes el plano y la escala de la página siguiente y trates de contestar lo que sigue:

- Mira la escala que figura con el plano, ¿cómo se entiende?, ¿1 cm de la escala a cuántos metros equivale?
- Mide las dimensiones del living-comedor, ¿cuáles serán las dimensiones reales aprovechables?


DORMITORIO 1
DISTRIBUIDOR
BAÑO
DORMITORIO 2
SALÓN
VESTÍBULO
COCINA
TENDEDERO
ESCALA 1 : 100
0. 1. 2. 3. 4. 5. mts.

- ¿Y de la cocina?, ¿cuáles serán las dimensiones reales?
- Los dormitorios, ¿cuáles serán las dimensiones reales?
- ¿Las camas son de medida normal, comparadas con el tamaño real?
- ¿Las mesas qué medidas tienen?, ¿serán cómodas para las personas que pueden alojar?
- ¿Caben esos muebles que figuran en esos ambientes?, ¿cuáles serán las dimensiones reales?

Comentario:

1 cm en el plano equivale a 100 cm ó 1 m, por lo tanto las dimensiones del living-comedor son de: 6 m x 3,50 m,
cocina: 1,50 m x 3,50 m,
dormitorio 2: 4 m x 2,50 m
dormitorio 1: 6,10 m X 2,50 m
si caben los muebles, son dimensiones amplias.

V. Construye un cubo

Materiales:

Seis cuadrados de cartulina y gomas.

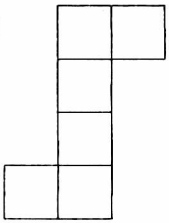
Propuestas al alumno:

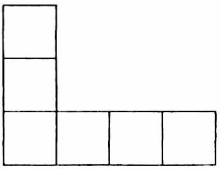
1)

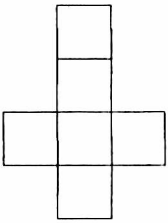
- Construye un cubo con las gomas y los cuadrados de cartulina.
- Ahora desármalo, ¿cuántas gomas precisas como mínimo, para que las caras queden unidas y situadas en el plano?
- Dibuja en un papel cuadriculado la figura obtenida.
- Vuelve a armar el cubo, desármalo de una forma distinta a la anterior y dibújalo de nuevo.
- ¿Hay otras maneras de desarmarlo? Busca todas las que puedas y dibújalas en papel cuadriculado.
- Explica cómo las encuentras.

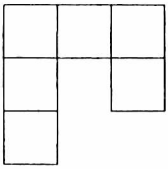
2)

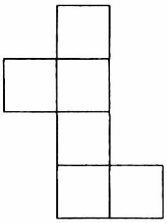
- ¿Con cuáles de estas figuras se puede formar un cubo?; utiliza la imaginación:

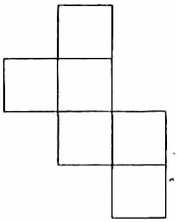
A) 

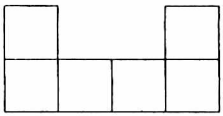
B) 

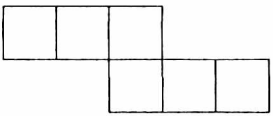
C) 

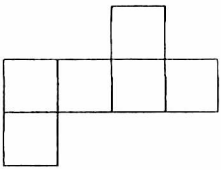
D) 

E) 

F) 

G) 

H) 

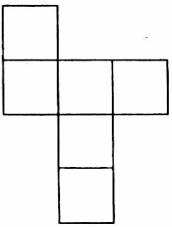
I) 

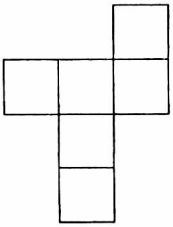
Comprueba tus respuestas construyéndolas.

Comentario:

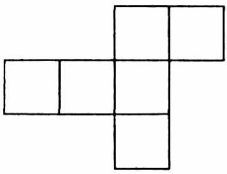
El objetivo de las actividades es pensar en términos espaciales, imaginar figuras y moverlas mentalmente por el espacio, imaginar partes no visibles, de un objeto real o representarlo en el plano.

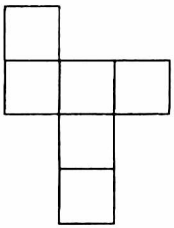
- Estas actividades mejoran la capacidad espacial y por ende la capacidad de razonamiento y manipulación de objetos reales.
- Está claro que no hay una única manera de desarrollar el cubo y se trata de buscar nuevos desarrollos y pueden surgir en ella procedimientos de búsqueda y recuento sistemático, favorecidos por el trabajo en grupo.
- Se podrá hacer ver que hay desarrollos que son iguales por ser **simétricos**





o que uno de ellos es la **rotación** del otro



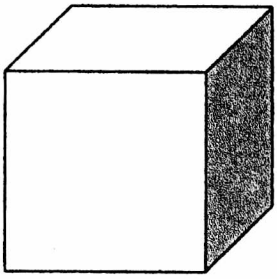


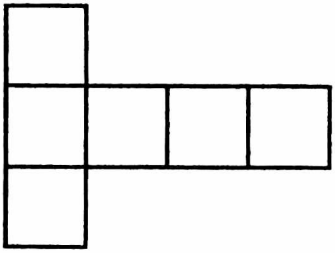
- Es importante instar a los alumnos a buscar las soluciones por sí mismos.
- En la última actividad está presente la simetría sin que sea necesario definirla.
- El alumno debe explicar el proceso seguido por escrito, lo que sirve para ayudar a su reflexión.
- En la última aparecen desarrollos del cubo falsos que es necesario identificarlos. Con ello se pretende contraponer a la idea: "que todas las figuras formadas por 6 cuadrados unidos, forman un cubo", por la que deben reunir otros requisitos.
- Sólo se pueden formar cubo con A), C), E), F), H) e I).

VI. Identificación de caras y vértices del cubo

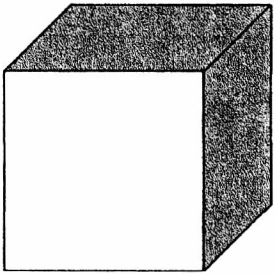
Materiales:

Se analizarán las siguientes figuras entregadas:

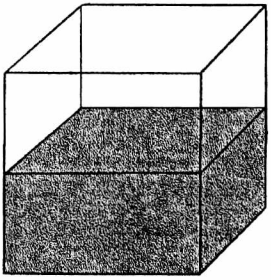




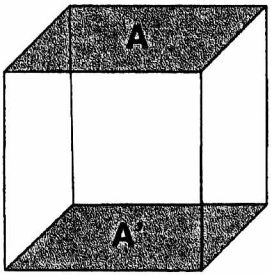
1. Si se pintan dos caras del cubo como las siguientes, ¿cuáles son las pintadas en el desarrollo?



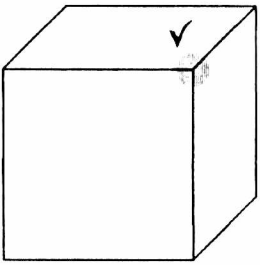
2. Si se pinta medio cubo, ¿cuáles son las pintadas en el desarrollo?



3. Si se marca una cara con A y la opuesta con A´, ¿cuáles son las marcadas en el desarrollo?



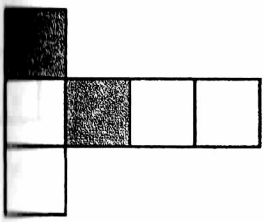
4. Si se señala un vértice del cubo con V, ¿cuáles son las caras marcadas con el punto en el desarrollo?

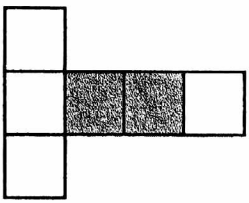


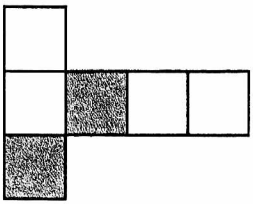
Comentario:

1)

- Con esta actividad pueden aparecer varios resultados correctos, dependiendo de cómo se abra el cubo para hacer el desarrollo.
- Son válidos los siguientes:

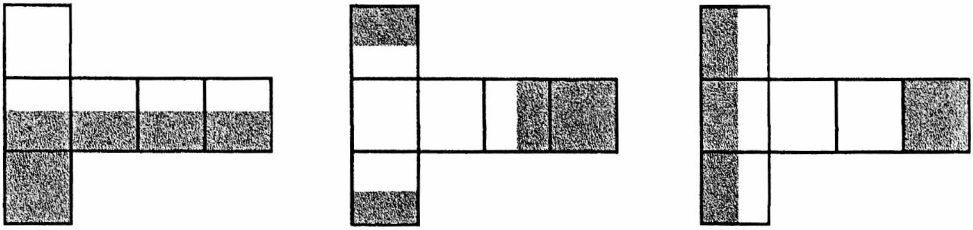




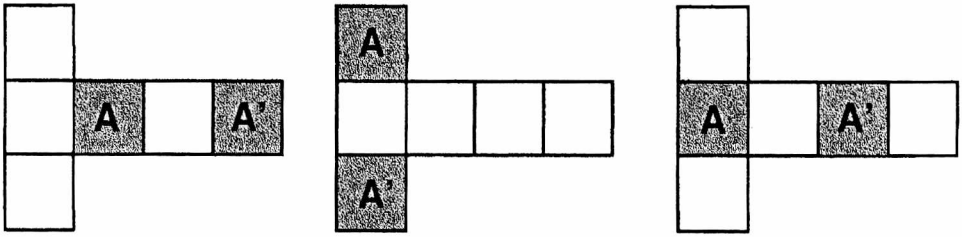


- Conviene alentar a los alumnos a que busquen todos los posibles.
- Se podrían pintar tres caras y hacerles imaginar cuáles serían los desarrollos posibles.

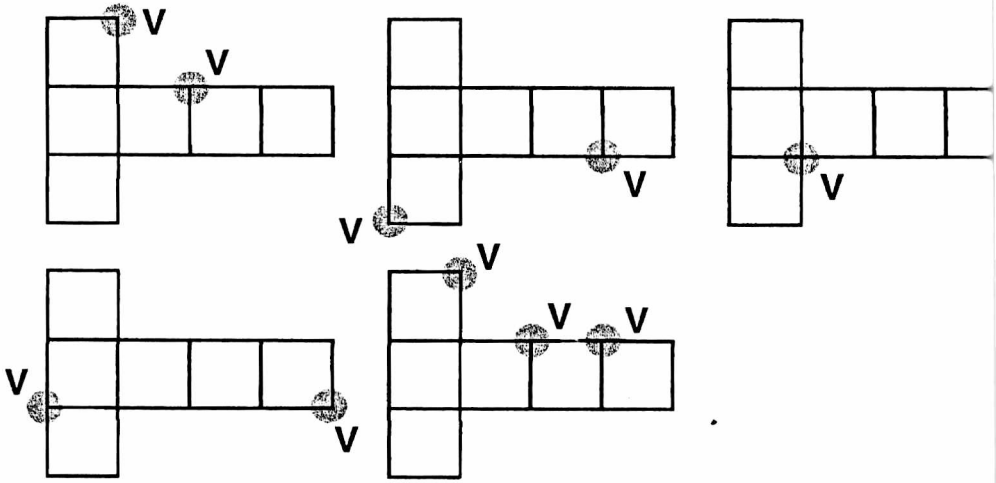
2)
En esta actividad los posibles correctos son:



3)
Los posibles son:

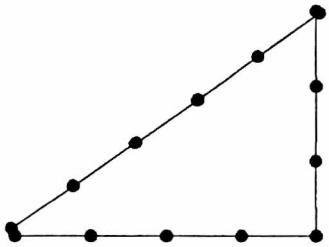


4) Las soluciones posibles son:



VII. Teorema de Pitágoras

Los egipcios utilizaban el siguiente procedimiento para dibujar ángulos rectos en el terreno: tomaban una cuerda, a la que hacían nudos, todos a la misma distancia, formando un triángulo, cuyos lados tuvieran 3, 4 y 5 espacios entre nudos; el triángulo resultante era rectángulo.



Los hindúes y chinos también usaban esta idea del triángulo rectángulo, para trazar la planta de los altares, pero en este caso las longitudes de los catetos eran 5, 12 y 13 espacios de nudos.

Materiales:
Un hilo de 50 cm (aproximadamente), marcado.

Propuesta al alumno:
Realiza en el hilo nudos cada 1 cm o marcas con marcador oscuro con esa medida.

- Prueba lo hecho por Pitágoras: construir un triángulo de 3 nudos, 4 nudos y 5 nudos, ¿es rectángulo?.
- Ahora verifica lo probado por Pitágoras:
  o $3^2 + 4^2 = 5^2$
- Prueba con otras medidas, si observas triángulos rectángulos, como:

12, 16 y 20;	2, 3 y 4;	1, 2 y 3;
9, 12 y 15;	10, 24 y 26;	5, 12 y 13;
8, 15 y 17;		

- Comprueba en los casos que se formen triángulos rectángulos, que se cumpla: "el cuadrado de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."
- Conocidos los catetos que figuran a continuación, ¿qué longitud tendrá la hipotenusa del triángulo rectángulo en cada uno de las siguientes casos? (puede darte hipotenusas con decimales):

Un cateto (cm)	Otro cateto (cm)	Hipotenusa (cm)
9	12	15
12	16	
1	1	
2	3	
6	8	
21	28	

- ¿Cuántas ternas son las posibles con números naturales?, ¿puedes sacar alguna conclusión?

Comentario:

- El objetivo de esta actividad es introducir el Teorema de Pitágoras, ya que si bien es una de las relaciones que más se utilizan para medir longitudes, la experiencia dice que es una relación que no se interioriza fácil.
- En esta actividad se pretende utilizar el Teorema de Pitágoras como un procedimiento para calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conocen 2 longitudes y se desconoce otra.
- El motivo de pedir a los alumnos que realicen las experiencias de forma práctica es para que entiendan en qué consiste la relación.
- La solución a la actividad de comprobar distintas ternas en las que se forman triángulos rectángulos son: (12, 16, 20); (9, 12, 15); (10, 24, 26); (5, 12, 13) y (8, 15, 17).
- La solución será:

$12^2 + 16^2 = 20^2$ $5^2 + 12^2 = 13^2$

$9^2 + 12^2 = 15^2$ $8^2 + 15^2 = 17^2$

$10^2 + 24^2 = 26^2$

- El cuadro quedaría:

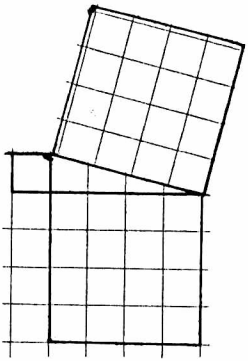
Un cateto (cm)	Otro cateto (cm)	Hipotenusa (cm)
9	12	15
12	16	20
1	1	1,41
2	3	3,60
6	8	10
21	28	35

VIII. Presentación histórica del Teorema de Pitágoras

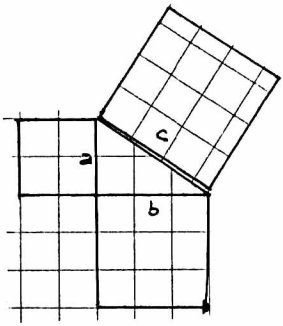
La siguiente actividad tiene valor histórico y se trata de reconstruir el Teorema. A Pitágoras (S. VI a. de C.) se le atribuye el descubrimiento del Teorema que lleva su nombre. Sin embargo –como se dijo– esa relación ya se había utilizado en Egipto y en la India para medir longitudes y acotar terrenos. El testimonio escrito de esta relación aparece en las tablillas babilonias. Se sabe que Pitágoras viajó a Egipto, Babilonia e incluso a la India y se apropió de esos conocimientos. Sin embargo, parece que lo se le puede atribuir es haber descubierto que: *"en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos."*

Materiales:
Papel cuadriculado.

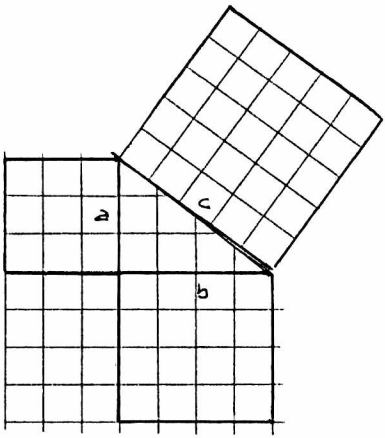
Propuesta al alumno:
- Comprueba lo que observas en las siguientes figuras:



$a^2=$
$b^2=$
$c^2=$



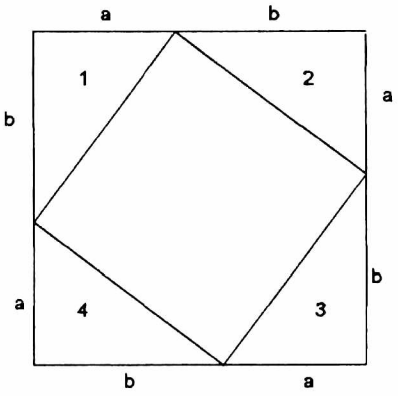
$a^2=$
$b^2=$
$c^2=$



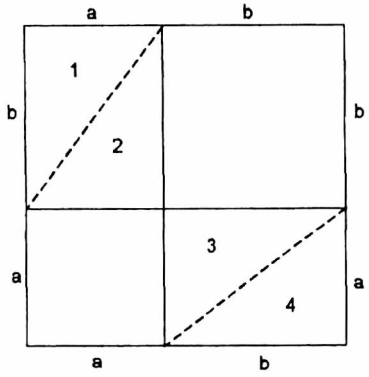
$a^2=$
$b^2=$
$c^2=$

La siguiente es una demostración del Teorema que se encuentra en el libro sagrado de la Aritmética de los Chinos.

- Construye en papel cuadriculado un cuadrado de lado 3 + 4 y coloca a ellos a y b, como la figura que sigue:



- Construye un triángulo rectángulo con las mismas medidas de los catetos y que puedas recortar.
- Coloca ese triángulo en las posiciones indicadas por el dibujo:



- Ambos cuadrados tienen los mismos lados, por lo tanto, ¿cómo son sus áreas?
- En ambos cuadrados sobran cuatro triángulos rectángulos iguales al modelo. Compruébalo superponiéndolos.
- Luego las áreas sombreadas, ¿cómo son?
- Saca tu conclusión en cuanto a las áreas de los cuadrados sombreados.

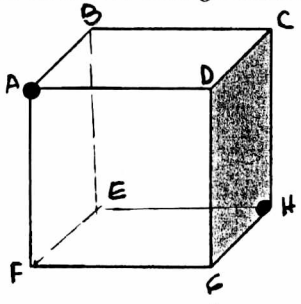
Comentario:
Se presenta como curiosidad histórica.

IX. Camino más corto sobre el Cuerpo

Propuesta al alumno:

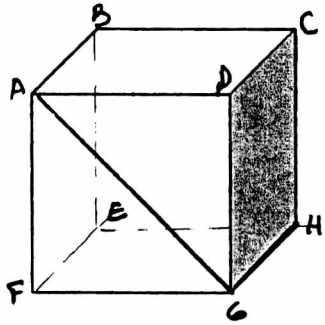
Una araña situada en el vértice A del cubo de la figura, ve llegar una mosca que se posa en el vértice H, ¿cuál será el camino más corto que deberá recorrer la araña sobre la superficie del cubo para capturar a la mosca?

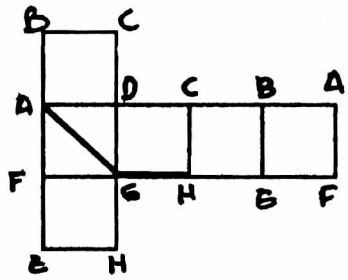
Si la arista del cubo mide 10 cm, ¿cuánto medirá el camino más corto?



Comentario:

- Este problema clásico exige mucha visión espacial para dar el resultado correcto, además de dominar el Teorema de Pitágoras.
- La primer respuesta puede ser el siguiente camino: la diagonal de una cara y una arista:





$AH = AG + GH$

Por ser AG diagonal de la cara y por Pitágoras:

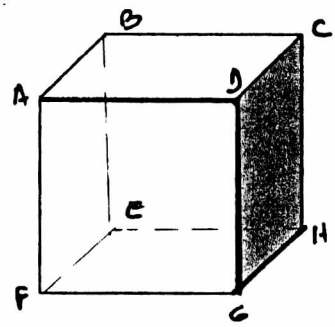
$AG^2 = 10^2 + 10^2$

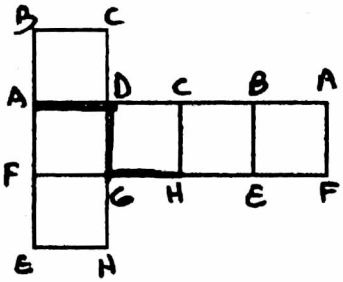
$AG = 14{,}14$

Luego: $AH = 14{,}14 + 10 =$ **24,14 cm.**

Esta solución satisface la intuición y podría ser la correcta, si no se les hace ver que sería igual que hiciéramos el camino: AE + EH, que es lo mismo, pero no parece más corto.

- Otro camino puede ser:



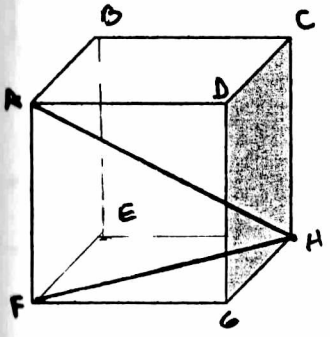


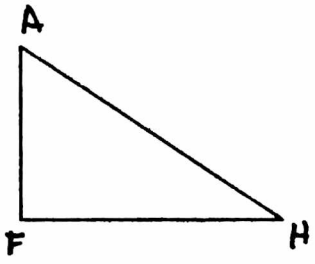
$AD + DE + GH$

$10 + 10 + 10 =$ **30 cm**

que es más largo que el anterior, por lo tanto descartada.

- Para llegar a la menor distancia entre esos dos puntos en que están la araña y la mosca, que será el segmento AH en el espacio, deberán aplicar Pitágoras



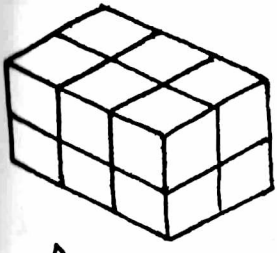


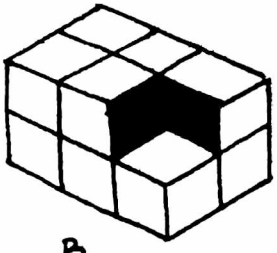
$AH^2 = AF^2 + FH^2$
$AH^2 = 10^2 + 14{,}14^2$
$AH = \sqrt{300} =$ **17,32 cm**

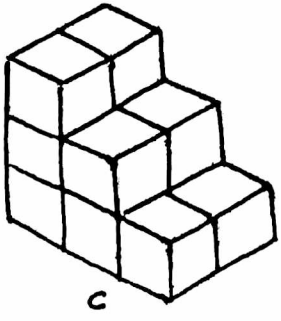
- De los tres este último es el camino más corto.

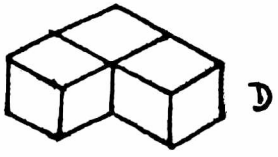
X. Volumen y superficie lateral en cubos

Materiales:









Cuerpos formados con cubos de 1 cm de lado y cubos de ladrillitos.

Propuesta al alumno:

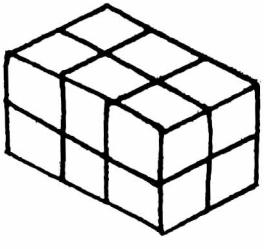
Observa las figuras que están a continuación y trata de completar la tabla:

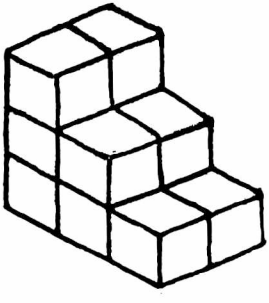
Cuerpo	Volumen	Superficie Lateral
A		
B		
C		
D		
A + D		

- ¿Cuál es el área lateral de ellos? Anótala en la tabla.
- Aclaración: área lateral es la superficie formada por las caras externas.
- Dibuja un cubo que tenga el mismo número de cubos que la A y la base de D. ¿Cuál es el volumen? ¿Cuál es el área lateral?
- ¿Encuentras cuerpos con igual área lateral y distinto volumen?
- ¿Encuentras cuerpos con igual volumen y distinta área lateral?

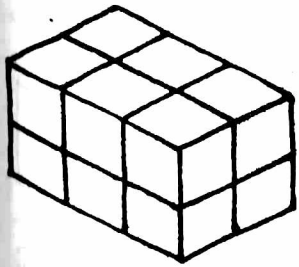
Comentarios:

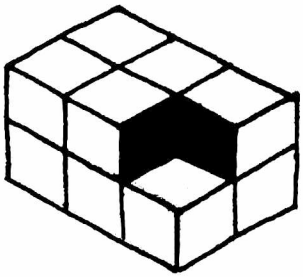
- Los tres primeros están pensados para que observen que hay figuras que tienen igual volumen y distinta área (A y C) y otras que tienen distinto volumen e igual área lateral.
- Hay cubos de igual volumen y distinta área lateral, como:





- Hay cubos de distinto volumen e igual área lateral, como:





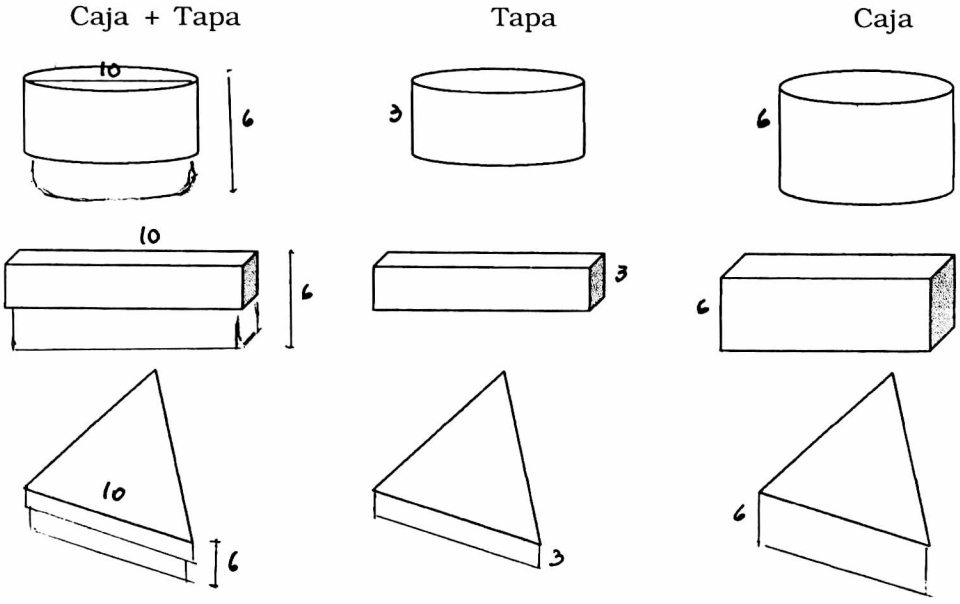
- Pueden probar estas propiedades con cubitos del tipo "ladrillitos".
- Es importante resaltar que el volumen se mantiene constante, aunque se cambien los cubos de sitio, siempre que el número total de cubos sea el mismo.
- Aunque algunos alumnos no tendrán dificultad de ver las figuras, cosa que ocurrirá si se ha trabajado en forma específica la visualización espacial, la actividad se podrá empezar con la construcción de los ladrillitos y luego ir al dibujo.
- Es interesante hacer ver que cuando se suman los cuerpos A + D:
  "Los volúmenes también se suman", pero "las áreas laterales no".
- La tabla completa sería:

Cuerpo	Volumen	Superficie Lateral
A	12	32
B	11	32
C	12	36
D	3	14
A + D	15	31

XI. Construcción de cajas

Material:
Dibujos de las cajas en perspectiva.

Propuesta al alumno:
Tienes tres cajas con distintas formas, que son polígonos regulares, que miden 6 cm de altura y sus lados 10 cm (en el círculo es el diámetro de 10 cm):



- Para los cálculos considera que el tamaño de las bases de la tapa y la caja son iguales, aunque una tiene que ser más pequeña que la otra, para que pueda encajar.
- Calcula el volumen de cada una.
- ¿Cuánta cartulina se precisa para construir cada una de ellas? (superficie lateral).
- Lleva esos valores a la siguiente tabla:

Tipo de caja	Volumen (cm^3)	Superficie lateral (cm^2)
Redonda		
Cuadrada		
Triangular		

- A pesar de que tienen medidas parecidas, ¿cuál es la que puede guardar más cosas pequeñas?, ¿cuál la que precisa más cartulina?

Comentario:

- Con esta actividad se pretende que repasen las fórmulas de las áreas y volúmenes de algunas figuras y también remarcar las diferencias que existen entre área y volumen.

- La tabla completa sería:

Tipo de caja	Volumen (cm^3)	Superficie lateral (cm^2) Caja + tapa
Redonda	471	439,6
Cuadrada	600	560
Triangular	259,8	356,6

- Con las últimas preguntas se pretende que saquen como conclusión: en la redonda cabe más (más volumen) y las superficies cuadradas son las de mayor área y, por lo tanto, se precisa más cartulina.

3. De la Aritmética al Álgebra

"No sólo los malos alumnos muestran aversión por el álgebra; esto puede ocurrirle a estudiantes inteligentes. Siempre hay algo arbitrario y artificial en una notación, es pesada tarea para la memoria aprender un nuevo sistema. Un alumno inteligente puede negarse a ello si no capta la razón. La aversión que muestra hacia el álgebra está justificada si no se le han dado ocasiones frecuentes de constatar por la experiencia la ayuda evidente que el lenguaje de símbolos matemáticos puede ofrecer a la mente. Ayudarle en tal experiencia es un deber importante del profesor, diremos incluso esencial, nada fácil por lo demás."

(Polya, 1965)

3.1 Introducción

El lenguaje corriente se estructura teniendo en cuenta las oraciones, formadas por: sujeto (personas u objetos) y verbos en el predicado que indican acciones o relaciones; en la aritmética los sujetos serían los números y las acciones o verbos serían las operaciones indicadas por los símbolos como: +; -; x; =; ...

Así como existen reglas para combinar los elementos en una oración, también existen reglas para combinar los elementos aritméticos, por ejemplo:

a) Jerarquía de las operaciones: la multiplicación se realiza antes que la suma o resta.

b) Uso de paréntesis: prioridad de solución en una expresión aritmética.

c) Distinto significado por su ubicación: no es lo mismo 3^2 que 32, ni (3;2).

Las actividades propuestas en este capítulo apuntan a profundizar estas cuestiones.

Una vez que el alumno maneje el modelo aritmético, se lo puede llevar al **uso de letras** como **generalización de números**, que no es otra cosa que la introducción del conocimiento de **variable**, que conduce al inicio del lenguaje algebraico.

La matemática tiene una notación que le es propia y que hace posible la aplicación formal de las reglas de la aritmética o del álge-

bra. Esta notación formal en matemáticas es el lenguaje en el que se expresa y es causa de gran confusión en la opinión de los alumnos. Esta confusión proviene en general, de la no captación del significado otorgado a las letras que es propia de ese lenguaje.

Para la enseñanza y aprendizaje del álgebra es fundamental el concepto de **variable** y se suele utilizar como si pudiera entenderse sin ningún problema, cuando la realidad es que no se trata de una simple sustitución de números por letras, sino que se utilizan dos procesos simultáneos que requieren de una planificación de estrategias de enseñanza para abordarlos. El concepto de variable no es trivial y no se trata "del uso de las x,..., o de letras" como dicen los alumnos.

Estos dos procesos son:

Generalización: que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a procesos de abstracción más elevados.

Simbolización: que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común las situaciones estudiadas.

El reto en el aula es no sólo trabajar en la construcción de la conexión: aritmética hacia el álgebra, sino también mantener viva la conexión: álgebra hacia la aritmética. Es decir, desarrollar la habilidad de ir y venir entre dos niveles de concepción y de ver las ventajas de ser capaz de escoger una perspectiva u otra, dependiendo del problema que se tenga que resolver.

3.2 Estadios del pensamiento Lógico

En la Psicología Cognitiva, los trabajos de Piaget, señalan pautas de desarrollo general del conocimiento de los alumnos, que se relacionan con sus actuaciones en Matemática en general y del Álgebra en particular.

Piaget dice que el desarrollo de la inteligencia del niño es una adaptación del individuo, al ambiente o al mundo que lo rodea. explica el problema del desarrollo de la inteligencia a través del proceso de maduración biológica.

Para él la palabra Aprendizaje tiene un doble sentido, *Iniciación al Álgebra*[1]:

1. Los conceptos vertidos sobre la teoría de Piaget, corresponden a lo expuesto por Socas, Camacho, Palarea y Hernández en *Iniciación al Álgebra*, editorial Síntesis (1989), en las páginas del 73 al 76, cuando se habla de "los estadios del desarrollo en Piaget".

a) El primero y más amplio se refiere al propio desarrollo de la inteligencia, como proceso espontáneo y continuo, que incluye maduración, experiencia, transmisión social y desarrollo del equilibrio.

b) El segundo se limita a la adquisición de nuevas respuestas para situaciones específicas o de nuevas estructuras para determinadas operaciones mentales.

Luego la inteligencia se desarrolla a través de un proceso de maduración y también incluye lo que se llama aprendizaje.

El proceso comienza con una forma de pensar que le es propia a cada nivel. Los cambios externos o intromisiones externas en la forma habitual de pensar, crean conflicto y desequilibrio. La persona repara esa confusión y resuelve el conflicto mediante su propia actividad intelectual. De todo esto, resulta una forma distinta de analizar y pensar las cosas que origina una nueva comprensión que satisface al sujeto. Conclusión, un estado de nuevo equilibrio.

"El proceso de desarrollo de la Inteligencia, tal como lo ve Piaget, se desarrolla en cada niño a través de determinados estadios, que son parte de un proceso continuo, en el cual una característica del pensamiento infantil, se cambia gradualmente, en un tiempo determinado y se integra en formas mejores de pensamiento. El niño puede estar en más de un estadio al mismo tiempo. Piaget distingue tres estadios del desarrollo cognitivo, cualitativamente distintos entre sí que se subdividen en subestadios." (*Iniciación al Álgebra*, editorial Síntesis).

El orden por el que deben pasar los niños de un estadio a otro no cambia, lo que sí cambia es la rapidez con que pasan las distintas personas, de acuerdo con sus características individuales.

Estos cambios no ocurren de un día para otro, a veces el niño pasa al otro estadio de desarrollo, conservando mucho del estadio anterior.

Por ejemplo: un niño que está en el pensamiento operativo concreto (capacidad para retener un número), puede estar en la etapa preoperacional con relación a trabajos más complicados de permanencia.

Muchas veces adultos y adolescentes, regresan al pensamiento de operaciones concretas o incluso al pensamiento preoperacional, cuando se los somete al aprendizaje de nuevas áreas y experiencias concretas en ellas, antes de avanzar a niveles de mayor abstracción del pensamiento.

Piaget señala que no hay períodos estáticos en el "período de desarrollo". Cada período comienza donde concluye el anterior y

será el principio de algo que nos llevará al que sigue. De esa manera, las "operaciones concretas" llegan a estar dentro de las "operaciones formales".

El siguiente es un esquema de los estadios y sus principales características, (citado en *Iniciación al Álgebra*, edit. Síntesis).

Estadios	Características
I **Sensoriomotor** **(0-2 años)** **Período sensorial y de coordinación de acciones físicas.**	• Al nacer, el mundo del niño se reduce a sus acciones primarias. • El niño no es capaz de representaciones internas de sus acciones (lo que se considera como pensamiento). • Ausencia operacional de símbolos. • Estadio prelingüístico, los objetos adquieren permanencia aun cuando éstos están fuera de su percepción (0 a 2 años). • Desarrollo de los esquemas sensoriomotores, finaliza con la adquisición de la conducta dirigida a un objetivo y la invención de nuevas soluciones, es decir, con el descubrimiento y la combinación interna de esquemas.
II **Operaciones Concretas** **IIa) Preoperaciones** **(2-7 años)** **Período de pensamiento representativo y prelógico**	• Inicio de las funciones simbólicas, representación significativa (lenguaje, imágenes mentales, juegos simbólicos, invenciones imaginativas, etc.). • A pesar de los adelantos en el funcionamiento simbólico, la habilidad infantil para pensar lógicamente es bastante limitada. • Ausencia de reversibilidad: incapacidad para invertir mentalmente una acción física para volver a su estado original. • Ausencia de concentración: incapacidad para retener mentalmente cambios en dos dimensiones al mismo tiempo. • Lenguaje y pensamiento egocéntrico: incapacidad para tomar en cuenta otros puntos de vista.

Estadios	Características
II **Operaciones Concretas** **IIb) Operacional concreto** **(7-11/12 años)** **Período de pensamiento lógico concreto**	• El niño mejora el pensamiento lógico y es capaz de pensar en objetos físicamente ausentes, de experiencias pasadas. • El pensamiento es limitado a cosas concretas, en lugar de ideas. • Adquiere reversibilidad que le permite invertir mentalmente una acción que antes sólo había llevado a cabo físicamente, la inclusión lógica, la clasificación y el ordenamiento de objetos, la habilidad para conservar ciertas propiedades de objetos (números, cantidades), a través de los cambios de otras propiedades, la capacidad de retener mentalmente 2 ó más variables cuando estudia los objetos. • Se vuelve sociocéntrico, cada vez más consciente de la opinión de los otros. • La operación matemática básica surge en este período.
III **Operaciones Formales** **(11/12-14/15 años)** **Período de pensamiento lógico ilimitado**	• Habilidad para pensar más allá de la referencia o experiencia concreta. • Capacidad de usar a nivel lógico enunciados verbales y proposiciones en vez de objetos concretos inversamente. • Habilidad para pensar teóricamente sobre las consecuencias de los cambios de objetos y sucesos. • Habilidad para razonar acerca de las combinaciones de las variables en un problema. • Capacidad para comprender reglas generales de ejemplos particulares. • Capacidad para deducir de proposiciones generales, conclusiones particulares.

3.3 ¿Cómo intervienen en la enseñanza del Álgebra estos estadios?

Con el término de álgebra, se consideran: el álgebra de los números y de las estructuras. Por álgebra de los números se entiende la habilidad para manipular letras y otros símbolos, que pueden representarse por: objetos, letras, números generalizados o variables y también a los distintos estadios de las operaciones, expresiones y entidades abstractas construidas por relaciones entre ellas.

Es importante para el docente que conozca qué tipo de interpretaciones y de operaciones son complejos en las tareas algebraicas. Es decir, cómo los alumnos interpretan o malinterpretan los símbolos en los distintos estadios del desarrollo.

Pasaremos a analizar, teniendo en cuenta la teoría de Piaget, algunos procedimientos propios del álgebra:

I. Sustitución de letras por números

En la experiencia realizada por Collis (1975)[2] se puede ver que la capacidad para trabajar con letras, depende en gran parte de lo que ellos eran capaces de considerar como real.

Él tomó la siguiente prueba:

Debes analizar cuáles son verdaderas, siempre, nunca o algunas veces:

$a + b = b + a$ siempre
nunca
algunas veces, esto es cuando...

$m + n + q = m + p + q$ siempre
nunca
algunas veces, esto es cuando...

$a + 2b + 2c = a + 2b + 4c$ siempre
nunca
algunas veces, esto es cuando...

En el estadio IIb) (operaciones concretas), señalado por Piaget, los alumnos consideran la letra como representación de un número y su manera de resolver problemas consiste en sustituir directamente la

2. Expuesto en *Iniciación al Álgebra*, editorial Síntesis (1989), en la página 82.

letra por un número. Por lo tanto, son capaces de contestar acertadamente la primera, pero no así la segunda y la tercera.

En el estadio III), los alumnos no habrán desarrollado aún el concepto de letra como variable, sino que piensan en las letras como representaciones de todos los números, en los que se quisiera pensar y les cuesta pensar en la segunda que:

n = p; ya que dicen que n no puede ser igual a p, la posibilidad de igualdad si son distintas las letras no la conciben y cuando analizan: 2c = 4c, no son capaces de concebir un caso en que se cumpla esa igualdad.

En la experiencia tomada con chicos de 16 años o más, ellos podían contemplar la letra como variable y fueron capaces de realizar las actividades en segundo y tercer lugar correctamente.

II. Resolución de ecuaciones

En una ecuación simple como: $x + 3 = 8$, el análisis será diferente de acuerdo con el estadio de pensamiento.

En la primera mitad del estadio IIb, el alumno cuenta desde 3 hasta 8 y contesta por la cantidad de unidades que faltan. No posee el concepto de operación inversa.

En la segunda mitad del estadio IIb, el alumno resuelve perfectamente esa ecuación, pero le cuesta reconocer que la sustracción puede usarse siempre como anulación de la adición.

En el estadio III, la noción inversa es general y también ésta de que la sustracción anula a la adición.

III. Álgebra abstracta

Es el lenguaje propio del álgebra en que se trabaja intensamente con letras y las operaciones, con símbolos del tipo:

$a * b = b * a$

que se necesita un nivel de abstracción mayor, que sólo se logra en los niveles finales de la etapa III y más adelante, cuando los estudiantes son capaces de trabajar correctamente dentro de un sistema definido.

No es conveniente abordarla en la enseñanza secundaria, por lo tanto no será desarrollada en este análisis.

3.4 Enseñanza-aprendizaje del Álgebra

En la enseñanza-aprendizaje del álgebra hay gran variedad de dificultades que pueden agruparse en distintas áreas[3]:

1. Dificultades debidas a la naturaleza del tema algebraico, dentro del contexto de la Matemática.
2. Dificultades que surgen de los procesos cognitivos de los alumnos y de la estructura y organización de sus experiencias.
3. Dificultades atribuibles a la naturaleza del currículo y a los métodos de enseñanza usados.
4. Dificultades debidas a las actitudes afectivas y no racionales hacia el álgebra.

Si el docente entiende estos errores del alumno como: una información parcial de las dificultades del álgebra, que requieren un refuerzo adecuado y no como una equivocación que con una mejor atención del alumno no se produciría, se habrá avanzado mucho en el camino al éxito de la enseñanza-aprendizaje.

A veces los problemas relacionados con el álgebra, se tratan de resolver poniendo el énfasis en una dirección única, lo que provoca distintas discontinuidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las distintas interpretaciones del álgebra escolar abordadas en el 2° ciclo (10-11 años), 3° ciclo (12-14 años) y hasta terminar el secundario, la conceptualización que se posee de las variables o letras pueden ser:

ÁLGEBRA	Aritmética Generalizada	Letras como generalización del modelo aritmético.	Currículo del Álgebra de la Escuela Obligatoria.
	Resolución de Ecuaciones	Letras como incógnitas específicas.	
	Funcional	Letras como argumento de funciones.	
	Estructural	Letras como símbolos abstractos.	

3. Estos conceptos se basan en lo expresado por "Iniciación al Álgebra", editorial Síntesis (1989), en las páginas 96 y 97.

3.5 Distintos lenguajes para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra

En la enseñanza-aprendizaje del álgebra, es muy importante dominar los cuatro lenguajes en que se pueden expresar las ideas algebraicas, y poder pasar de uno a otro en el proceso de enseñanza.

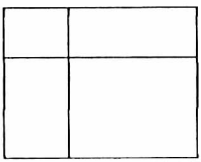
Estos son: lenguaje aritmético, lenguaje corriente, lenguaje geométrico y lenguaje algebraico.

El "lenguaje aritmético" es un primer paso, que es necesario manejar con destreza, porque si no es imposible llegar al "lenguaje algebraico", en donde se requiere un mayor nivel de "generalización".

Esta generalización se expresa con letras, tomándolas como "variables" y viendo la dependencia de unas con respecto a las otras.

También es importante que se puedan obtener distintas representaciones, utilizando "formas geométricas", que permiten visualizar la relación que se está analizando: "lenguaje geométrico". Este lenguaje puede ser sustituido por "modelos físicos o gráficos" que generan "esquemas mentales" que facilitan la comprensión de abstracciones matemáticas.

Ejemplo:

Lenguaje Aritmético	Lenguaje Algebraico	Lenguaje Corriente	Lenguaje Geométrico
$(2 + 3)^2 =$ $2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2$	$(a + b)^2 =$ $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$	El cuadrado de un binomio es igual a la suma del cuadrado del primero, más el doble del producto de los dos, más el cuadrado del segundo.	a b 

Es importante en el estudio del álgebra retrasar las técnicas formales por procedimientos más informales, hasta que los procesos sean identificables en distintos contextos.

Hay muchos estudios realizados en enseñanza-aprendizaje del álgebra que muestran que los alumnos pueden desarrollar aspectos estructurales, si se les hace vivir experiencias que incluyan: propiedades de campo, tanto en ambiente aritmético como algebraico; el registro de generalizaciones numéricas, utilizando notación no-ambigua; la resolución de problemas que contengan datos literales y la manipulación de parámetros de ecuaciones funcionales con ayuda de computadoras.

3.6 Utilización del lenguaje aritmético (pre-algebraico)

Las actividades que se proponen a continuación intentan preparar, en forma gradual, a través de la aritmética, para los procesos que son propios del álgebra como: generalización y simbolización.

Es importante saber que el cálculo algebraico se construye teniendo como base el dominio de cinco propiedades numéricas: conmutativa de la suma y multiplicación; distributivas del producto con respecto a la suma y la resta y asociativas del producto y suma. Su trabajo adecuado y su expresión simbólica, nos conduce a la generalización.

Se sabe que casi todas las actividades relacionadas con la matemática requieren cuantificar la realidad. Por eso, es importante adquirir destreza con los números, para interpretar conceptos y desarrollar habilidades, y contextualizar así los números y las operaciones.

No se trata de trabajar los algoritmos para efectuar operaciones con números, sino de aprovechar estas ideas y completarlas con otras que pueden ser de presentación novedosa.

Se pretende que en todas las actividades se resuelvan problemas numéricos, estimando resultados, valorando si un resultado es o no razonable, utilizando cuando sea conveniente calculadoras (que pueden incorporarse a los quehaceres habituales de todos los alumnos).

Se debe fomentar el gusto por los números, sus propiedades y las relaciones entre ellos. Para conseguirlo, es importante plantear situaciones con cierto "sentido mágico", con ciertas regularidades, con ciertas "simetrías".

Teniendo en cuenta los estadios de Piaget, es aconsejable comenzar a trabajar en el segundo ciclo de enseñanza, alrededor de los 10 años de edad.

3.6.1 Algunas ideas, actividades y problemas (no secuenciadas)

I. Cálculos mentales

Propuesta al alumno:

a) Lucio fue de compras y debe traer: 3 kg de carne ($10 el kg) y 4 kg de pan ($2 el kg). Lleva $50 y le devuelven $10, ¿es correcto?, calcula mentalmente.

b) Once amigos van a comer juntos a un restaurante y deciden pedir el menú del día que es de $17 (bebida incluida). Uno de ellos decide juntar el dinero para pagar conjuntamente dejando $4 de propina, ¿cuánto tendría que poner cada uno?, ¿cuánto en total? Realiza las cuentas mentalmente y explica cómo lo haces.

Comentario:

Con estas actividades se pretende mostrar, situaciones de la vida real a los alumnos. En éstas puede ser necesario recurrir al cálculo mental, así como potenciar el uso de métodos de cálculo mental que tengan en cuenta las propiedades de las operaciones.

Son muchas las estrategias mentales que pueden desarrollar, se les puede sugerir algunas, pero es importante que cada alumno siga sus propios métodos.

Por ejemplo:

Para multiplicar por 5, multiplicar por 10 y dividir por 2.

Para multiplicar por 11, en el b):

$17 \times 11 = 17 \times (10 + 1) = 17 \times 10 + 17 \times 1 = 170 + 17 = 187$

II. ¿Qué operación se hace primero?

Propuesta al alumno:

a) Si utilizas la calculadora para hacer:

$5 + 3 \times 2$

y realizas la operación tal cual viene, ¿qué resultado obtienes?

Si realizas primero 3 x 2 y luego sumas 5, ¿qué resultado obtienes?, ¿son iguales?, ¿cuál es la operación correcta?, ¿en una combinación de operaciones de suma, resta, multiplicación y división, cuáles se hacen primero?

b) Utiliza paréntesis para obtener como resultado 25 en una expresión de este tipo:

$5 + 3 \times 5 + 5$

c) Calcula:

$2 . (5 - 1) + 8 - 4 . 2 + 2 =$

$2 . 5 - 1 + (8 - 4) . 2 + 2 =$

$2 . (5 - 1 + 8) - 4 . (2 + 2) =$

Escribe tres expresiones más con los mismos números y con las mismas operaciones, pero con los paréntesis colocados de otra manera y calcúlalas después.

d) Intenta obtener los números: 20, 55 y 99, utilizando únicamente los números 3, 7 y 5 y las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (puedes repetir los números y utilizar paréntesis).

e) Añade todos los paréntesis que quieras pero sin cambiar nada más y obtener el mayor número posible de las siguientes expresiones:

$2 : 4 + 8 \times 4 + 6 : 4 - 8$

Comentario:

Se pretende que los alumnos lleguen a conocer y aplicar las reglas de orden de las cuatro operaciones y valorar el papel que juegan los paréntesis para romper el ordenamiento de las operaciones.

En a) aparecen dos números distintos como resultado y se debe aclarar por qué y cuál es el correcto, se debe dejar claro que las operaciones deben hacerse en determinado orden y lo último (salvo que esté dentro del paréntesis) que deberá hacerse son las sumas y restas.

Aclarar que las calculadoras no son inteligentes y ellos son los que deben decidir cómo usarlas.

La b) pretende que coloquen correctamente los paréntesis: $4 + (5 + 2) \times 3$

En e) el resultado es abierto, da lugar a distintos resultados.

III. Juego con números

Propuesta al alumno:

Utilizando cuatro 4 y las operaciones que quieras (suma, resta, multiplicación, división) intenta obtener los números del 0 al 10 (puedes utilizar paréntesis).

Ejemplo: $4 - 4 + 4 - 4 = 0$

$0 = 44 - 44$

Repite el ejercicio para cuatro 9.

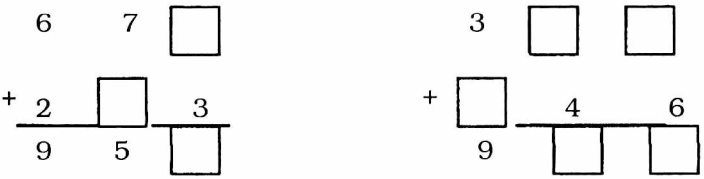
Comentario:

En esas actividades se pretende que el alumno practique la utilización correcta del lenguaje aritmético escrito, haciendo uso de las jerarquías de operaciones y paréntesis. Su objetivo es preparar el camino para utilizar el lenguaje algebraico escrito y también facilitar la comprensión y uso de las reglas de calcular con símbolos algebraicos.

IV. A sumar

Propuesta al alumno:

Trata de completar los números que faltan en los espacios vacíos. Están comprendidos entre 1 y 9 y en ninguna de las sumas aparece dos veces el mismo número.



Comentario:

Es bueno para que practiquen sumas y su inversa, y les produce un desafío que los incentiva en la resolución.

La solución esperada es:

$$\begin{array}{r} 671 \\ +\,283 \\ \hline 954 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{r} 372 \\ +\,546 \\ \hline 918 \end{array}$$

V. Enigma

Propuesta al alumno:

Encuentra 2 números sabiendo que:

- Los 2 números son menores que 40 y mayores que 6.
- Su producto es 192.
- La suma es el doble de 15 más 2.
- La diferencia de los 2 números es múltiplo de 2.
- Ayuda: realiza una tabla con pares de números.

Comentario:

El resultado es 8 y 24. Permite jugar con números cambiando uno y ver cómo varía el siguiente y luego decidir cuál es el par que cumple todas las condiciones. Por ejemplo:

6	32	8 + 24 = 32
7	27,42	32 = 2 x 15 + 2
8	24	24 - 8 = 16, que es múltiplo de 2

VI. Cuadrados mágicos:

Propuesta al alumno:

Un cuadrado mágico es un cuadrado de números en el que al sumar los números en forma horizontal, vertical y diagonal, el resultado es el mismo número. Por ejemplo, en el siguiente el número mágico es 15:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Teniendo en cuenta esto trata de resolver el siguiente cuadrado mágico y busca el número mágico.

9		
	8	
		7

O sabiendo los números mágicos completar los siguientes cuadrados mágicos:

a) N° Mágico: 12

	4	
2		5

b) N° Mágico: 27

	9	
4		5

Comentario:

Esta es una actividad clásica pero muy rica didácticamente, ya que con ella se pueden lograr muchas cosas, por ejemplo, que repasen suma y resta de naturales, sin pretender que saquen la conclusión que el número del medio debe ser la 1/3 parte del número mágico; o proponerles cuadrados mágicos como el que sigue, que los desconcierta y desestabiliza, porque sólo lo pueden hacer con enteros:

N° Mágico: 12

	4	
7		8

Aunque conozcan los números enteros los desorienta bastante la presencia de los negativos y contestan que no se puede hacer.

Los resultados de los cuadrados propuestos serían:

9	7	8
7	8	9
8	9	7

3	3	6
7	4	1
2	5	5

0	11	1
5	4	3
7	-3	8

13	0	14
10	9	8
4	18	5

VII. Juego: ¡Tres en línea!

Propuesta al alumno:

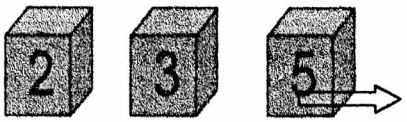
Para este juego se precisan tres alumnos, tres dados, un cubilete y dos tableros como los de la siguiente página:

Reglas de juego:

- El jugador que tiene el turno tira los tres dados como en el ejemplo y realiza las operaciones que quiera con la condición de que sólo utilice una vez cada número de los que han salido con el objetivo de conseguir un número de la tabla y poner entonces una ficha en él.
- Si en la tirada no se puede obtener un número de la tabla se pierde el turno.
- Las operaciones permitidas son: suma, resta, multiplicación y división.
- El árbitro lleva una tabla de operaciones y resultados.
- Gana el primer jugador que consiga tres en línea.

25	18	1	12
4	34	19	7
37	8	42	15
26	14	38	9

24	14	6	32
18	26	40	8
2	38	7	36
30	35	9	16



$5 . 3 - 2 : 2 = 14$

Comentario:

Una vez más se pretende con este juego que practiquen la escritura de expresiones aritméticas, utilizando la jerarquía de operaciones y paréntesis. Puede servir como ejercicio de consolidación y repaso.

Se pueden ir anotando las operaciones realizadas por cada alumno o realizarlas mentalmente, como más convenga desde el punto de vista de los conocimientos que se quieren ejercitar; pero si se hace por escrito puede ayudar a trabajar la escritura simbólica y a reflexionar sobre las expresiones utilizadas.

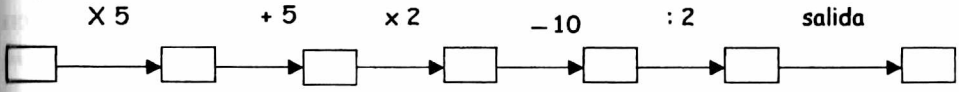
Después de jugar un tiempo prudencial (20 ó 30 minutos), se deben discutir con toda la clase las expresiones que han creado conflicto.

Se puede aumentar la dificultad del juego utilizando un único tablero y sólo tres fichas para cada alumno y permitiendo que una vez que estén colocadas las fichas se pueda levantar una para colocarla en una nueva posición.

VIII. Trencito de operaciones:

Propuesta al alumno:

Rellena cada cuadrado en blanco, poniendo en el primero un número cualquiera, por ejemplo 4, y después realiza cada una de las operaciones que están indicadas:



- Prueba con otros números y anota las operaciones.
- ¿Podrías escribir una expresión matemática que nos indique qué operaciones tenemos que hacer con cualquier número que coloquemos en la entrada para obtener la salida?
- Inventa otro trencito como el anterior y escribe las expresiones matemáticas correspondientes.

Comentario:

En esta actividad se pretende llegar a la simbolización de variables y operaciones.

Los alumnos deben comprobar con varios números el funcionamiento del trencito.

Antes de pedirles la expresión simbólica, se pueden trabajar trencitos de distintas longitudes y complejidad.

Para ver cómo funcionan las expresiones que escriban, es conveniente hacer una puesta en común con toda la clase. Se debe tener cuidado con las expresiones incorrectas, porque se pueden fijar errores graves.

La formalización de la escritura se debe realizar luego de que los alumnos hayan aceptado la conveniencia de utilizarlas.

3.7 Álgebra con la aritmética generalizada (letras como modelo de generalización de la aritmética)

Para trabajar el proceso de generalización con los alumnos se deben distinguir distintas fases:

En primer lugar, se debe tomar conciencia de que esa situación se puede considerar de forma general y de que "hay algo" que pasa

siempre y que justifica los casos concretos que se observan. Es una toma de conciencia sobre la forma de pensar y es necesario hacerla porque para algunos alumnos (los que presentan dificultades) llegar a ella supone un verdadero descubrimiento.

En segundo lugar, en el camino de la utilización del lenguaje simbólico, es importante que se expresen primero verbalmente con toda precisión. En la puesta en común, incentivarlos para que busquen distintas expresiones encontradas y, por último, hacerles sentir la necesidad y la posibilidad de lograrlo en el lenguaje del álgebra.

También reforzar el uso de la igualdad entre las distintas expresiones algebraicas.

Una dificultad importante que tienen los alumnos para escribir expresiones algebraicas, es traducir al lenguaje del Álgebra, relaciones entre cantidades. Por lo tanto, es importante usar procedimientos en distintos contextos (geométricos, gráficos, numéricos, etc.); utilizar letras para representar las variables y ser muy cuidadosos en el uso de los signos de las operaciones aritméticas y de las igualdades.

A veces entienden perfectamente las relaciones y no pueden expresar las ideas en el lenguaje algebraico.

Se puede comenzar a trabajar perfectamente con la generalización con letras en el estadio III de Piaget, luego de haber trabajado de forma correcta con el lenguaje pre-algebraico o aritmético.

3.7.1 Algunas ideas, actividades y problemas (no secuenciadas)

3.7.1.1 Generalización con tableros de números

Materiales: Calendario. Calculadora con las cuatro operaciones básicas.

Propuesta al alumno:

- El día 1° de marzo de 1999 es lunes, ¿podrías completar el calendario del mes?, ¿encuentras alguna relación entre cada número y el que está escrito abajo?, ¿ocurre eso siempre, por qué?
- Selecciona en tu calendario un cuadrado cualquiera, que tenga cuatro números, por ejemplo:
- Suma las diagonales ¿qué observas?

17	18
24	25

- Prueba con otros cuadrados de cuatro números, ¿pasa siempre lo mismo? ¿por qué?
- Elige tres números cualesquiera, que están seguidos en la misma fila 7, 8 y 9. Suma los dos de los extremos, ¿qué relación tiene esta suma con los números del centro? Prueba con otros tres números seguidos, ¿ocurre lo mismo?, ¿por qué?
- Comprueba si ocurre lo mismo, cuando se elige tres números seguidos de tres columnas, ¿por qué? Elabora alguna conclusión.
- Lucía me dijo el otro día: "hoy es 6 de febrero y mi cumpleaños es el 16. Como hoy es sábado, ¿en qué día caerá mi cumpleaños? ¿En qué día caerá el 26?, ¿cómo puedes escribir la relación, si se avanza 10 días, 20 días?, ¿ y si retrocedemos?

Comentario:

En esta actividad se pretende que observen regularidades entre los números y que obtengan generalizaciones.

En la primera pregunta es necesario que observen que todas la filas tienen siete números consecutivos, que si las filas tuvieran otro tamaño la diferencia sería ese valor constante.

En la segunda y tercera actividad las relaciones que se encuentran son únicas porque los números son consecutivos y están colocados por filas de igual longitud.

Se puede usar en distintos niveles de pensamiento: primero que expresen verbalmente las conclusiones, luego que traten de escribirlas con palabras y por último, si pueden, que las simbolicen. El trabajo es interesante que lo discutan en grupo y luego en común, agregándole más complicaciones al problema; seleccionar cuadrados de números más grandes o escribir los números, con filas de distinta cantidad de números.

En la puesta en común se deben analizar todos los resultados de los alumnos que hayan aparecido, resaltando expresiones incompletas, ambiguas, etc.

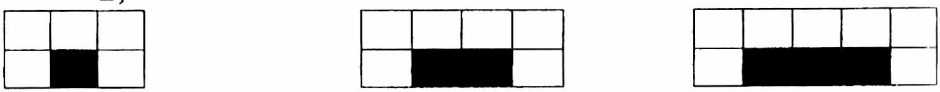
En el problema propuesto al final hacer notar que, al avanzar diez días en cualquier mes, se avanzan tres días de la semana y al avanzar 20 días, se corren seis días de la semana.

3.7.1.2 Generalizaciones con estructuras geométricas

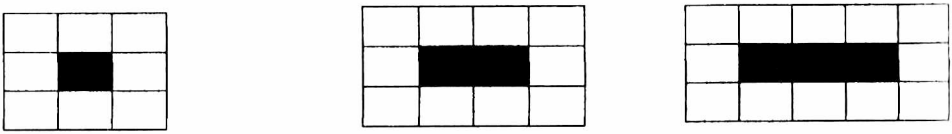
I. Propuesta al alumno:
Observa los siguientes dibujos:

A)

B)



C)



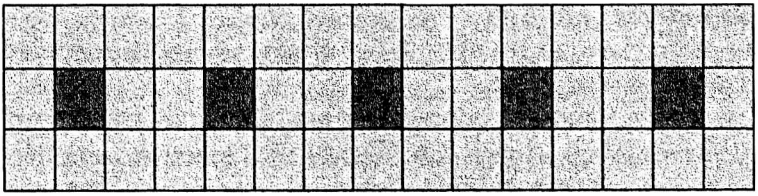
- ¿Cuántas baldosas negras tiene cada uno de los dibujos? ¿Cuántas baldosas blancas tiene cada uno de los dibujos?
- Si hay diez baldosas negras, ¿cuántas baldosas blancas habrá? ¿Cuántas baldosas habrá en total?
- Si hay veinte baldosas negras, ¿cuántas baldosas blancas habrá? ¿Cuántas baldosas habrá en total?
- ¿Podrías escribir una fórmula que muestre la relación entre las cantidades de baldosas blancas, si conocemos las de baldosas negras?
- ¿Podrías escribir la relación entre el número total de baldosas y el número de baldosas negras?

Comentario:

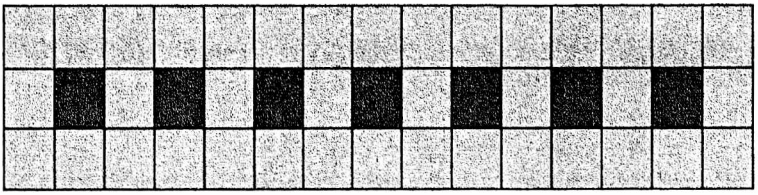
- Se pretende que el alumno llegue a una generalización mediante un apoyo visual.
- Cuando sea posible, se aconseja que los valores de algunas de las variables que intervienen en el problema se cambien y se calculen. Esto contribuye a formar el concepto de variable.
- Las relaciones que se solicitan deben tratar de lograrse de a poco: primero con palabras, luego intentar con letras, con algún grado de simbolización, para posteriormente llegar a la generalización.
- Si se utilizan símbolos, puede que surjan dificultades de traducción, por ejemplo, en A) que digan "2B = N", en ese caso hacer ver que hay 6B y 3N y que si se sustituye la letra B por el número 6, no se obtiene esa igualdad, hasta llegar a la correcta que: B = 2N.
- En la última pregunta hacer ver que el total de ambos colores se logra cuando:
  B + N = 2N + N = 3N.
  Es decir, llegar a escribirlo en función de una de las variables.
- En la B) hacer notar que en todos los dibujos hay cuatro cuadritos en las puntas y que, sacando eso, hay por cada negra una blanca, por lo tanto:
  B = N + 4
  T = B + N = N + 4 + N = 2N + 4
- En la C) hacer notar que en todos los dibujos hay cuatro cuadritos en las puntas y que, sacando eso, hay por cada negra dos blancas, por lo tanto:
  B = 2N + 6
  T = B + N = 2N + 6 + N = 3N + 6
- Tal vez, en una primer etapa, sólo se pueda trabajar el número de baldosas blancas en función de las baldosas negras y no pedir el total de baldosas.
- En todos los casos es muy rica la discusión en común, ya que lo que no se le ocurre a uno, se le ocurre a otro de los alumnos y así se enriquecen todos.

II. Propuesta al alumno:

- La siguiente es una guarda correspondiente a un piso, obsérvala y contesta:



- ¿Cuántas baldosas oscuras tiene el dibujo? ¿Cuántas baldosas claras?
- Si hubiera diez baldosas oscuras, ¿cuántas baldosas claras habría?
- Si hubiera veinte baldosas negras, ¿cuántas baldosas blancas habría?
- ¿Podrías escribir la relación entre el número de baldosas oscuras y el número de baldosas claras?
- Si ahora eligieras una guarda como la que sigue, ¿podrías contestar las preguntas de arriba?



Comentarios:

En esta actividad se plantea un tipo de generalización diferente de la anterior, pues se trata de observar una estructura física y deducir un modelo general manteniendo algunas condiciones.

- El apoyo visual sirve como ayuda y es necesario empezar dibujando algunos ejemplos de "caminos" concretos variando el número de baldosas.
- Las relaciones pedidas a los alumnos las pueden escribir con palabras, si alguno la expresa con algún grado de simbolismo se socializa.
- Si por ejemplo dicen: 8 claras = 1 oscura, habría que hacerles ver que no se cumple y cuál es el error.
- La última guarda tiene un orden de dificultad mayor, ya que se comparten cuadritos claros. Una forma que suelen adoptar es

notar que hay por cada oscuro 5 claros además de 3 cuadritos:
5C + 3;

- O que en el primer oscuro hay 8 cuadritos claros y luego en los restantes hay 5:

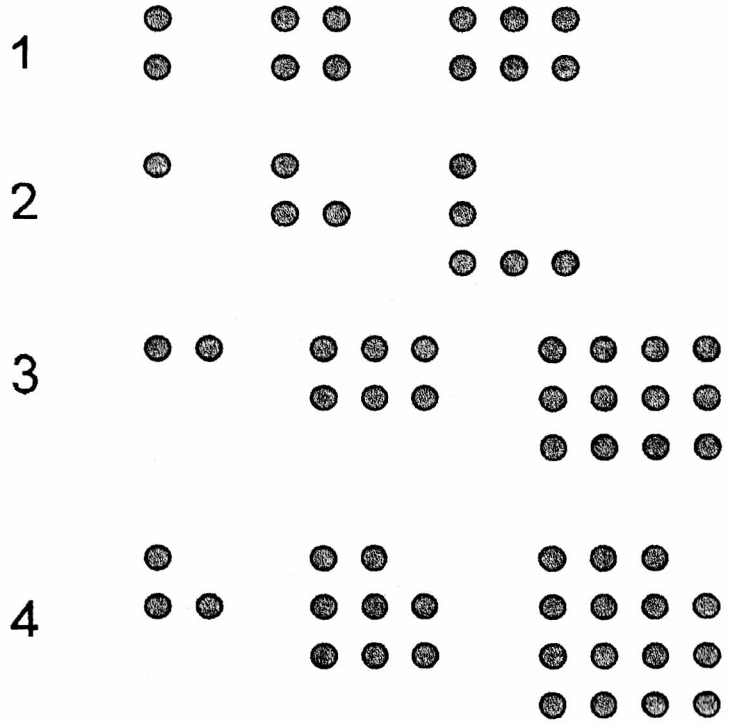
8 + (C - 1) . 5

- Se puede intentar probar esas dos igualdades, utilizando la propiedad distributiva.

3.7.1.3 Generalización con puntos

Propuesta al alumno:

Observa los siguientes dibujos, trata de anticipar:
¿Cuántos puntos encontrarás en la posición 10?
¿En la posición 20?
¿Y en la posición 100?
¿Cuántos puntos encontraremos en la posición n para cada secuencia?

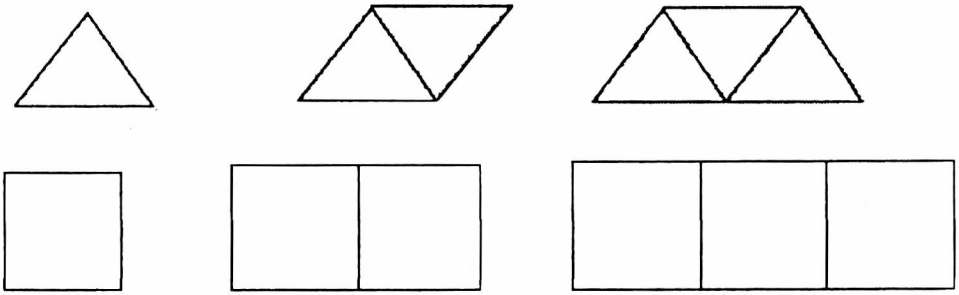


Comentarios:

- **En la primera** no hubo gran dificultad para darse cuenta de la regularidad **2n.**
- **En la segunda** no hubo gran dificultad para darse cuenta de la regularidad **2n - 1.**
- **En la tercera** algunos ven como un rectángulo de lados consecutivos **n . (n + 1).**
  Otros como cuadrados de n + 1 y quitándole 1 fila, por lo tanto: **$(n + 1)^2 - (n + 1)$**
  Otros como cuadrados de n y sumándole una fila: **$n^2 + n$.**
- **En la cuarta** algunos ven como un cuadrado más las 2 filas de ese número: **$n^2 + 2n$.**
  O como cuadrados de n + 1 lado menos 1: **$(n + 1)^2 - 1$.**
  Se intenta analizar la igualdad de ambos miembros.

3.7.1.4 Generalización con materiales

Propuesta al alumno:
Construye con los palillos figuras como las siguientes:



Trata de contestar:

- ¿Cuántos palillos se utilizan para formar figuras que tengan dos triángulos?
- ¿Cuántos para formar figuras con tres triángulos? Completa la tabla:

Figuras	Con 1	Con 2	Con 3	Con 4
Triángulos				
Cuadrados				

- ¿Cuántos palillos se utilizan para formar figuras con dos cuadrados?
- ¿Con tres cuadrados? Completa la tabla.
- ¿Cuántos palillos se utilizan para formar una figura de 100 triángulos?
- ¿Cuántos palillos se utilizan para formar una figura de 100 cuadrados?
- ¿Qué relación observas que hay entre número de palillos y número de triángulos?
- ¿Qué relación observas que hay entre número de palillos y número de cuadrados?

Comentario:

- El objetivo es que generalicen a través de una situación real.
  N° de T . 2 + 1, o lo que es lo mismo: n . 2 + 1
  3 + (n - 1) . 2, o lo que es lo mismo: 3 + 2n - 2 (si aplico distibutiva).
  n . 2 + 1 = 3 + (n - 1) . 2
- La tabla es un apoyo para ir viendo que hay "algo" común, "algo que pasa siempre" y que explica los casos concretos.
- Sería interesante que se prueben que todas las expresiones logradas son iguales.
- La de los cuadrados refuerza el método aplicado en el anterior.
  3 . n + 1 = 4 + (n - 1) . 3

3.7.1.5 Generalización con propiedades numéricas

Materiales:
Calculadoras elementales (de 4 operaciones).

I. Sumas consecutivas

Propuesta al alumno:
Observa las siguientes sumas y contesta:

0 + 1 = 1
1 + 2 = 3
2 + 3 = 5
3 + 4 = 7
4 + 5 = 9
.....

- ¿Qué tienen en común las sumas obtenidas?
- ¿Ocurre siempre esto?
- Escribe la suma que estaría en el lugar 10, en el lugar 20.
- ¿Puedes explicar por qué ocurre?
- ¿Puedes escribir con letras lo que dices?

Comentario:

- El objetivo de esta actividad es que se den cuenta de las distintas relaciones que aparecen entre los números, por ejemplo: "Que al sumar un par y otro impar da siempre impar."
- Se pretende que se acostumbren a pensar en generalizaciones y que escriban con palabras lo que observan como regularidades.
- Si las sumas están ordenadas y sumamos dos números consecutivos, se obtienen todos los números impares ordenados. Se puede preguntar, ¿por qué en la suma siguiente se obtiene el número impar que le sigue?
- Si el nivel del curso lo permite (según Piaget, alrededor de los 13 años o más), se puede generalizar con fórmulas como:
  $(n + 1) + n = 2n + 1$, o su equivalente: $n + (n - 1) = 2n - 1$

II. Propiedades con números

Propuesta al alumno:

Escribe tres números consecutivos y súmalos. Divide la suma por 3.

Repite el mismo procedimiento con varios números otras veces y lleva esos valores a una tabla como la siguiente:

Número	Suma	Dividido 3
4; 5; 6	4 + 5 + 6 = 15	5

- ¿Qué ocurre?, ¿por qué ocurre?
- Escríbelo con palabras.
- ¿Puedes escribirlo como una fórmula?

Comentario:

- La explicación que se pretende de parte de los alumnos debería ser del tipo: "La suma de 3 números consecutivos es igual a 3 veces el número más 3."

- "Al dividir por 3 esa suma, da el del medio."
- La expresión literal: $\frac{3n + 3}{3} = n + 1$,

tratar de lograrla o al menos que la expresen con palabras.

III. ¿Es casualidad?

Propuesta al alumno:

1) Calcula las siguientes diferencias:

$12^2 - 11^2 =$
$11^2 - 10^2 =$
$10^2 - 9^2 =$
$9^2 - 8^2 =$
$8^2 - 7^2 =$
$7^2 - 6^2 =$
.....

- ¿Puedes saber el resultado de las operaciones anteriores, sin necesidad de hacer las operaciones?
- Escribe con tus palabras una regla del tipo: "Siempre que se resten los cuadrados de dos números que se diferencian en uno, ocurre..."
- Comprueba con decimales del tipo: $9{,}5^2 - 8{,}5^2 =$
- ¿Puedes escribir con letras lo que observas como una regla?
- Prueba con otros números si se cumple esa fórmula.

2) Analiza qué ocurre cuando la diferencia entre los números es de 2:

$10^2 - 8^2 =$
$8^2 - 6^2 =$
$6^2 - 4^2 =$
.....

$11^2 - 9^2 =$
$9^2 - 7^2 =$
$7^2 - 5^2 =$
.....

- Escribe con tus palabras una regla del tipo: "Siempre que se resten los cuadrados de dos números que se diferencian en dos, ocurre..."

3) Analiza qué ocurre cuando la diferencia entre los números es de 3:

$10^2 - 7^2 =$
$7^2 - 4^2 =$

- Escribe con tus palabras una regla del tipo: "Siempre que se resten los cuadrados de dos números que se diferencian en tres, ocurre..."

Comentario:

Se pretende que vean la regularidad. En la 1), que es igual a la suma de los dos números consecutivos y que además es impar.

Luego que comprueben con otros números la ley enunciada por ellos.

Se podría probar para negativos y verificar el cumplimiento de la fórmula.

En la 2), cuando difieren en 2 números, se obtendrían los números pares, e iguales al doble de la suma de ellos.

En la 3), se obtienen el triple de la suma de ellos.

Sería interesante si los alumnos pueden extender a la ley general "la diferencia de cuadrados de dos números es igual a la suma de los números por la diferencia de éstos".

Formalizando esta propiedad con letras:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

IV. Propiedades de los números

Materiales:

Calculadora con las cuatro operaciones básicas.

Propuesta al alumno:

Hallar las sucesivas potencias de 7:

$7^0=$	$7^6=$
$7^1=$	$7^7=$
$7^2=$	$7^8=$
$7^3=$	$7^9=$
$7^4=$	$7^{10}=$
$7^5=$	$7^{11}=$

- ¿Qué observas? ¿Es razonable?
- ¿Cuáles serían las últimas 2 cifras de 7^{32}?
- ¿Cuáles serían las últimas cifras de 7^{399} y cuáles las de 7^{538} ?
- ¿Puedes deducir la regla general?

Comentario:

- Se intenta obtener generalizaciones del juego con números y potencias de 7.
  Se puede ampliar el ejercicio para otros números, por ejemplo para 9.
- La generalización del cuarto punto podría ser:

$4n \rightarrow 01$
$4n+1 \rightarrow 07$
$4n+2 \rightarrow 49$
$4n+3 \rightarrow 43$

3.7.1.6 Generalización con calculadoras

I. Factor constante

Materiales:
Calculadora con las 4 operaciones básicas.

Propuesta al alumno:

- Prueba en tu calculadora la siguiente secuencia de teclas:
  3 + + = ¿qué número aparece?
- Sin borrar, aprieta otra vez el = ¿qué número hay ahora?
- Sin borrar, aprieta otra vez el = ¿qué ocurre?

- Borra y realiza lo mismo con:
  4 + + = ¿qué número aparece?
- Otra vez el = ¿qué número aparece?
- Otra vez el = ¿qué número aparece?
- Sin usar la calculadora, completa la siguiente tabla:

Secuencia	Operaciones	Resultado
9 + + = = 15 + + = = = = = 1,5 + + = = = 1000 + + = = = = = 1,5 x x = = = 1000 x x = = = =		

- Borra y realiza lo mismo con:
  3 x x = ¿qué número aparece?
- Otra vez el =, ¿qué número aparece?
- Otra vez el =, ¿qué número aparece?
- Prueba las mismas secuencias con − o :
- Saca alguna conclusión que vincule esas operaciones.

Comentario:

- La actividad está pensada para una calculadora en la que el factor constante se programe poniendo el número al principio y repitiendo dos veces la operación.
- La generalización es posible que se realice con distintos grados y se aceptarán y comentarán todos.
- Este procedimiento permite generalizar expresando la relación entre la operación que se quiere realizar y el número de veces que se aprieta el signo igual. Por ejemplo, en el primer caso:
  4 . n° de veces que se aprieta la tecla =
  4 . n
- En el caso de la multiplicación es:
  3 . por el n° de veces más 1 que apretamos el =
  3 . (n + 1).
- La actividad se puede ampliar para la resta y para la división.

II. ¡Adivina la regla!

Materiales:
Calculadora con las cuatro operaciones básicas.

Propuesta al alumno:

- Prueba en tu calculadora la siguiente secuencia de teclas:
  4 + + 3 = ¿qué número aparece?

- Sin borrar, aprieta otra vez el =, ¿qué número hay ahora?
- Sin borrar, aprieta otra vez el =, ¿qué ocurre?
- Trata de completar la siguiente tabla:

N° de signos =	Resultado
1	
2	
3	
4	
5	

- Trata de explicar qué hace la calculadora, con tus palabras: "El número pulsado en la pantalla es igual a la suma del otro,...".
- En lugar de pulsar la tecla +, pulsa la tecla x: 4 x x 3 =, y completa una tabla

N° de signos =	Resultado
1	
2	
3	
4	
5	

- Con tus palabras trata de explicar qué hace la calculadora: "El número pulsado en la pantalla es igual al producto de ellos por ..."

Comentario:

- Se pretende en esta actividad que observen regularidades, sin saber que están trabajando con progresiones.
- Si colocan dos veces la tecla + obtienen una progresión aritmética, cuyo primer número es el número pulsado y la razón es el segundo:

  $4 + 3 \cdot n$

- En el caso de la operación producto, se obtiene una progresión geométrica, del tipo:

  $4 \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$

4. Inicio al Álgebra

– Ya le tengo explicado que todo aquello que se sale de lo vulgar no resulta un obstáculo, sino que es más bien una guía. El gran factor cuando se trata de resolver un problema de esta clase, es la capacidad de razonar hacia atrás.

Ésta es una cualidad muy útil y muy fácil, pero la gente no se ejercita mucho en ella. En las tareas corrientes de la vida cotidiana resulta de mayor utilidad el razonar hacia delante. Por cada persona que sabe analizar, hay cincuenta que saben razonar por síntesis.

– Confieso que no le comprendo –le dije

– No esperaba que me comprendiese. Veamos si puedo plantearlo de manera más clara. Son muchas personas que, si usted les describe una serie de hechos, le enunciarán cuál va a ser el resultado. Son capaces de coordinar en su cerebro los hechos y deducir que han de tener una consecuencia determinada. Sin embargo, son pocas las personas que, diciéndoles usted el resultado, son capaces de extraer de lo más hondo de su propia conciencia los pasos que condujeron a ese resultado. A esta dificultad me refiero cuando hablo de razonar hacia atrás; es decir, analíticamente.

Arthur Conan Doyle

4.1 Álgebra de la resolución de ecuaciones (letras como incógnitas)

4.1.1 ¿Qué dicen las investigaciones del aprendizaje?

Uno de los requisitos primordiales para generalizar e interpretar de forma adecuada las representaciones estructurales es la concepción del carácter simétrico y transitivo de la igualdad. Normalmente se lo usa como un símbolo separador.

Hay muchas investigaciones realizadas en este tema, que comienzan con lo que se conoce como "expresiones aritméticas con un número escondido" (con la sustitución del número por un objeto o una letra) y llevan a una descripción de la expresión. Los estudios muestran que es posible cambiar la concepción del igual como unidireccional y como una respuesta al lado derecho, por una concepción procedimental, en que las letras representan números, el igual

representa equivalencia en ambos lados y el lado derecho puede expresar no sólo números, sino también expresiones algebraicas.

Bell, Malone y Taylor (1987)[1] realizaron una investigación en la que se les pedía a los alumnos que resolvieran problemas del tipo:

"A, B, C son tres montones de rocas; en B hay 2 más que en A; C tiene 4 veces más rocas que A. El total de rocas es 14. Halla el número de rocas de cada montón, usando tres métodos diferentes, es decir utilizando la x en diferentes posiciones."

El trabajo permitió observar la necesidad de paréntesis, evaluar la técnica de construcción de ecuaciones y el proceso de "sustitución" de expresiones en vez de números.

Operar con ecuaciones como objetos matemáticos implica el método formal de resolución de ecuaciones (efectuar la inversa), operar en ambos lados de la igualdad. Sin embargo, el primer método que se enseña es el de adivinar y probar números, o trabajar hacia atrás.

Los distintos métodos se clasifican, según los distintos tipos:

1 usar hechos numéricos
2 usar técnicas de conteo
3 cubrir datos
4 resolución hacia atrás
5 sustitución por prueba y error
6 usar tablas
7 transposición (cambiar de lado y de signo)
8 efectuar la misma operación en ambos lados

Las dos primeras son propias de la aritmética:

$$5 + x = 8$$

se ve que 5 + 3 es 8, o se cuenta 5, 6, 7, 8 y se observa que hay tres números para ir del 5 al 8.

En el 3 (cubrir datos), se pueden analizar:

$$2x + 9 = 5x$$

como 2x + 9 es 5x, debe ser equivalente a 3x, ya que 2x + 3x es 5x, por lo tanto x es 3.

Los alumnos que dominan esta técnica se desempeñan mejor que los que únicamente conocen las técnicas formales (las dos últimas).

1. Traducción realizada por Vilma María Mesa en 1995 para la Universidad de los Andes.

En el 4 (ir hacia atrás), es parecido al de resolución aritmética. Por ejemplo:

$$2x + 4 = 18$$

se comienza por el lado derecho y yendo hacia la izquierda, deshacer las operaciones, usando en cada paso, operaciones inversas:

$$18 - 4 = 14$$
$$14 : 2 = 7$$

En el 5 (prueba y error), aunque suele ser usado al comienzo, rápidamente se descarta por demandar mucho tiempo. Puede ser interesante, como verificación de los resultados obtenidos una vez resuelta la ecuación.

Los primeros cinco métodos, llamados intuitivos, resultan difíciles de generalizar, sin embargo los alumnos tienen más éxito cuando dominan los métodos intuitivos y formales, que cuando sólo dominan un solo tipo de método.

Otra aproximación al procedimiento de resolución de ecuaciones es usar tablas (método 6), con ayuda de la calculadora; el alumno da valores a ambos lados de las columnas que corresponden a cada expresión de la ecuación y cuando obtiene el mismo resultado, se detiene el procedimiento.

El método 7, de cambiar de lado es una simplificación del 8, de operar en ambos lados; sin embargo, para los alumnos se trata de dos métodos distintos.

Operar de ambos lados, enfatiza la simetría de la igualdad, simetría que no se tiene cuando se usa transposición.

Es común que los alumnos que utilizan el método de cambiar de lado y signo, no estén considerando la ecuación como un objeto matemático.

Cuando los alumnos han dominado el método de resolver "hacia atrás", les es más difícil, el concepto de "efectuar la misma operación a ambos lados", pues no ven que la ecuación tenga dos lados.

Como contraste, cuando los estudiantes han manejado el método de prueba y error, es más fácil que reconozcan que se requiere un balance entre los dos lados de la ecuación, dando una mejor base para métodos formales de resolución de ecuaciones.

4.1.2 ¿Cómo trabajamos ecuaciones?

Es habitual que se comience con la enseñanza de ecuaciones y su solución con reglas que, aplicadas fielmente, permiten llegar a resolverlas; así lo encaran muchos libros de texto, pero la experiencia nos enseña, y las teorías del aprendizaje lo corroboran, que por mucha destreza que se adquiera, ésta no necesariamente va ligada a la adquisición de conceptos, ya que es común que estos errores persistan al cabo de los años, lo que hace pensar en la necesidad de revisar métodos más adecuados para su enseñanza.

En la enseñanza del álgebra se recurre a distintos "modelos" que permiten pasar de forma simple de una situación problemática a una ecuación, así como iniciar a los alumnos en su resolución y en el conocimiento de las reglas de manipulación de expresiones algebraicas sencillas.

Los "modelos" son en el álgebra una herramienta fundamental que permite pasar de una situación problemática, expresada en lenguaje cotidiano, al modelo y de éste a la expresión algebraica correspondiente. Es decir, pueden usarse como "modelo" de iniciación a las ecuaciones, en su doble significado: como lenguaje y como recurso didáctico que engendra esquemas que hacen más fácil el aprendizaje.

La utilización de modelos juega un papel fundamental en la creación de conceptos y procesos de razonamiento, porque permite hacer accesibles y manipulables conceptos intelectualmente más difíciles. Para que esto ocurra es necesario que el modelo cumpla las dos condiciones:

- que la descripción o solución obtenida en el modelo sea igualmente válida en la situación que representa,
- que el modelo tenga en sí mismo una autonomía con respecto a lo representado.

Las actividades que podemos proponer para un mejor abordaje del tema podríamos dividirlas en actividades "informales" y "formales" de la enseñanza de ecuaciones. Vamos a recurrir a distintos modelos en el estudio y resolución de ecuaciones: balanzas, diagramas, cadenas, gráficas, tableros con fichas, etc.

4.1.3 Actividades informales

Entendemos por estas actividades a aquellas que recurren a esquemas expresados en lenguaje gráfico-figurativo y otras en lenguaje gráfico no figurativo que sirven para demostrar una proposición, resolver un problema o expresar en forma lógica o gráfica la ley de variación de un suceso. Con este último sentido se utilizará, es decir, como esquemas ilustrativos de distintas relaciones cuantitativas que representan el recorrido de esas relaciones bajo órdenes de cálculo.

4.1.3.1 Algunas ideas, actividades y problemas (no secuenciadas)

Propuestas al alumno:

I. Cubrir datos

Encuentra el número cubierto y luego comprueba el resultado:

- 2 . □ + 4 = 10
- 2 . 8 + □ = 10
- 5 . 4 + 18 = □ - 20
- 5 . 5 - 4 = 8 + □

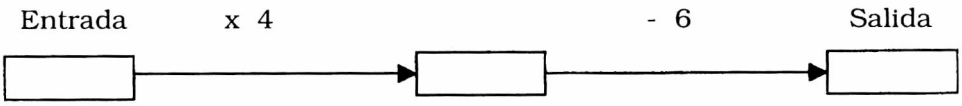
II. Calcular letras

Encuentra la letra y luego comprueba el resultado:

- 2 . a + 4 = 10
- b . 3 + 4 = 11 - 1
- 2 . 3 + c = 11 - 1
- 2 . 3 + 4 = d - 1
- 2 . 3 + 4 = 11 - e

III. Cadenas de operaciones

- En las siguientes cadenas calcula las salidas correspondientes a las entradas, añade valores y busca su respectiva salida:

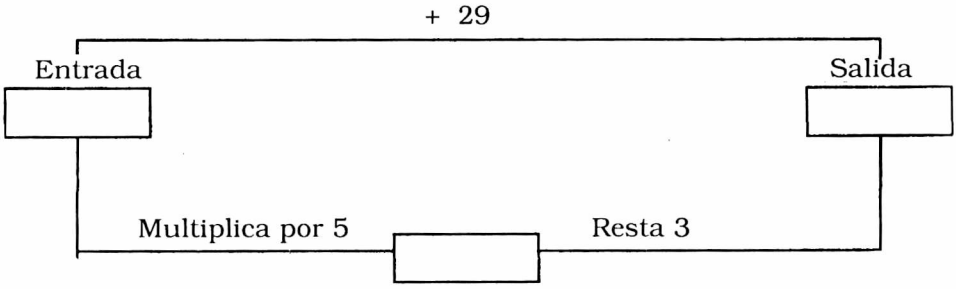


Entrada	Salida
10	
-43	
5	

- ¿Puedes encontrar el número que hay que poner en la entrada para que el número de salida por ambos caminos sea el mismo?

IV. Cadenas dobles

Si colocas un número a la entrada y sigues el camino de arriba y de abajo, debes llegar al mismo número. Prueba con varios y anota el resultado en la tabla propuesta.



Entrada	Salida arriba	Salida abajo

V. Calcula letras en ambos lados

- 2 . 3 + a = 14 - a
- 3.a + 4 = 7.a - 4
- 3.a + 5 = 3.a - 4

Comentario:

En estas actividades se propone por primera vez de forma explícita la resolución de ecuaciones que no son consecuencia del análisis de un problema concreto.

No se pretende que analicen un método de resolución, sino que se practique el procedimiento de "deshacer" las operaciones o el "tanteo", recurriendo a tablas para ayudarse. Es importante que puedan alternar distintos procedimientos y utilizar, según los casos, el que más convenga.

En I los resultados los pueden obtener, deshaciendo, sin necesidad de formalizar reglas y las soluciones son: 3; -6; 58; 13.

En II se trata igual que en las anteriores, pero utilizando letras y en distintos lugares, para que se acostumbre a que las variables no necesariamente tengan que estar en un solo lugar.

Las soluciones de este apartado son: 3; 2; 4; 11 y 1.

En III la tabla es un recurso que ayuda a razonar y probar con distintos números, puede inducirse a que aparezcan números negativos o decimales, los resultados son:

Entrada	Salida
10	34
-43	-178
5	14
-32	-134
18	66
-12	-54

La última pregunta los obliga a pensar en un número que a la entrada y salida sea el mismo, y el resultado del propuesto es 2.

En IV se combinan cadenas de operaciones para plantear situaciones más complejas. El método más inmediato es el de ensayar valores utilizando una tabla para obtener el mismo valor en ambas columnas de salida. El resultado es 8.

La metodología que se pretende que utilicen en V es muy eficaz para el trabajo algebraico ya que la variable está en ambos miembros y este método es más útil para el desarrollo formal de ecuacio-

nes, pero que comienzan a resolverlo por tanteo; la última ecuación es para que se acostumbren que no todas las ecuaciones tienen solución. Los resultados son: 4; 2; sin solución.

4.1.4 Actividades formales

Los libros de texto recurren al método que enunciamos como transposición de términos y termina siendo la aplicación de un algoritmo, carente de sentido para el alumno que sólo debe recordar cómo hacerlo hasta lograr automatizarlo.

El alumno acepta sin dificultad que la letra puede significar una incógnita, pero operar con la incógnita, deshaciendo paréntesis, quitando denominadores o pasando a otro miembro, no tiene un significado natural para ellos.

Es muy importante que se llegue en forma paulatina a la resolución de ecuaciones por métodos algebraicos como son: transposición de términos y operaciones en ambos miembros.

Una forma preparatoria es la de usar balanzas, ya que ayudan a lograr ecuaciones que equilibren y permitan trabajar la simetría del signo igual, y el concepto de ecuaciones como relaciones entre algo desconocido (variable independiente) y algo conocido (variable dependiente).

Es útil introducirlo a los 12 ó 13 años, ya que pueden manejar muy bien la idea de equilibrio en ambos platillos de la balanza, de la forma:

$$A \cdot x = B \quad \rightarrow \quad B = A \cdot x$$

Representaremos la ecuación como una situación obtenida al estar la balanza en equilibrio.

Actividad en el "Modelo"	Ecuación
Si se añade o quita el mismo peso a los platos, la balanza sigue equilibrada.	Si se resta o suma el mismo número a los dos miembros de una ecuación, ésta no varía.

Este modelo tiene algunas desventajas que debemos tener en cuenta; una de ellas es que se considera a la cantidad desconocida,

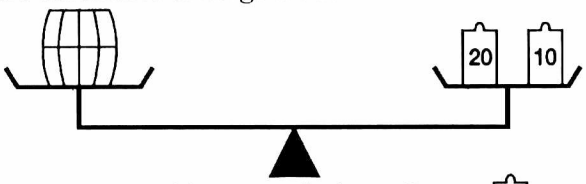
no una variable a hallar, otra que el "equilibrio de los brazos" no puede resolver ecuaciones del tipo: $x^2 = 9$ ó $x + 9 = 0$

4.1.4.1 Algunas ideas, actividades y problemas (no secuenciadas)

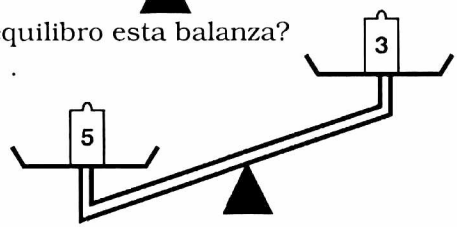
I. Problemas con igualdades entre números y letras

Propuestas al alumno:

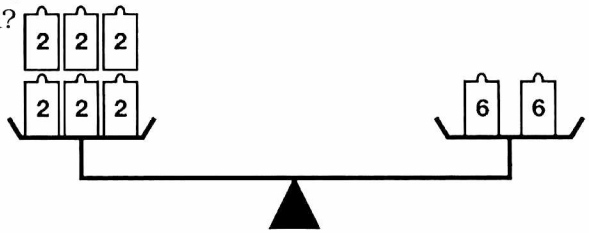
1) La figura muestra una balanza en equilibrio, con un tambor en un platillo y pesas en el otro. ¿Cuál es el peso del tambor? Exprésalo mediante una igualdad



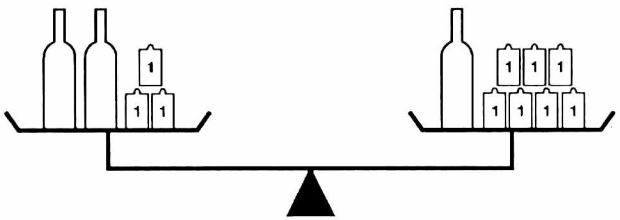
2) ¿Con cuánto equilibro esta balanza?
5 kg= 3 kg+ . . .



3) Observa esta balanza ¿Qué ocurrirá si se le añade a cada platillo la mitad de lo que tiene? ¿Y si se saca a cada platillo la mitad de lo que tiene ahora?



4) Observa esta balanza. ¿Cuánto pesa cada botella?



Comentario:

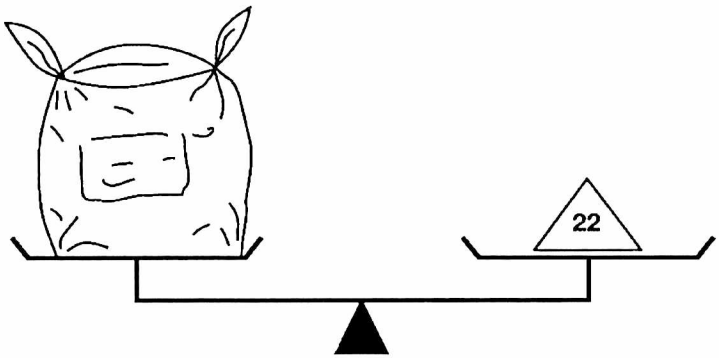
- La observación visual de un hecho cotidiano es muy útil para comenzar a plantear igualdades entre números y letras.
- Se deben analizar todas las variantes posibles de los objetos a pesar, para enriquecer el problema.
- Los resultados de las actividades propuestas serían:

1) T = 20kg + 10kg
   T = 30kg
2) 5kg = 3kg + 2kg
3) 2kg . 6 = 6kg . 2
   12kg = 12kg
4) 2B + 3P = 1B + 7P
   2B + 3P = 1B + 3P + 4P
   2B = 1B + 4P
   1B = 4P

II. Iniciación al lenguaje simbólico

Propuestas al alumno:

1) Observa la balanza. ¿Cuánto pesa la bolsa?



2) Llama 'x' al peso de la bolsa y expresa en símbolos la situación indicada.

3) Representa gráficamente la situación correspondiente a la siguiente expresión:

x + 6 = x + x + x + 2 (las 'x' representan el peso de latas)

4) ¿Cuánto pesa cada lata?

5) Explica cómo hiciste para obtener el resultado de la actividad 4.

Comentario:

- De la observación visual se debe llegar a la expresión simbólica y también de la expresión simbólica a construir una situación cotidiana.
- Es muy importante que el alumno pueda hacer y deshacer enunciados.
- Es importante no usar siempre la misma letra, porque si no los alumnos llegan a pensar que la ecuación "es una igualdad donde figura la x".
- Hay que hacer notar que estas igualdades se cumplen para un valor particular de la letra y no para cualquiera como en las identidades.
- Se los puede estimular para que puedan construir situaciones similares.
- Se pretende que contesten:

1) B = 22kg
2) x = 22kg
3) x + 6kg = x + x + x + 2kg
   6kg = x + x + 2kg
   2kg + 2kg + 2kg = x + x + 2kg
4) 2kg = x

III. Efectuar operaciones en ambos lados

Materiales:

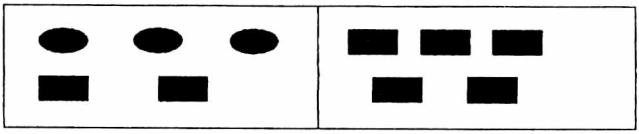
Tablero de cartulina con un símbolo igual en el centro y fichas de colores con formas de ⬭ y ▭ de colores distintos, se deberá anotar las jugadas en anotador.

⬭ Incógnita negativa
● Incógnita positiva
▭ Números negativos
■ Números positivos

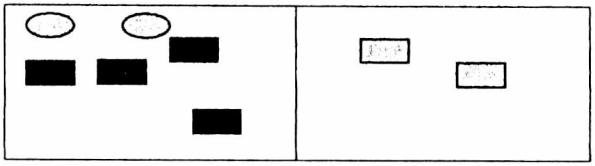
Regla de juego: "Parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado, se neutralizan y eliminan."

Propuesta al Alumno:

En tu tablero trata de reproducir simbólicamente ecuaciones del tipo: 3x + 2 = 5

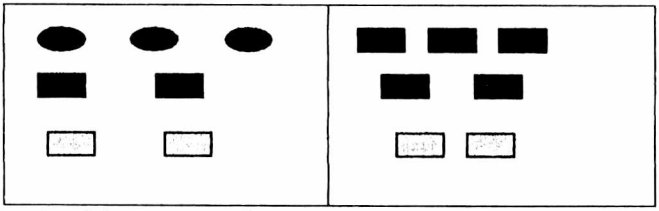


O del tipo: -2x + 4 = -2



Se juega por turno, introduciendo o eliminando fichas que hagan de la situación planteada otra equivalente que permita aislar las fichas que representan las incógnitas positivas del lado izquierdo y números del lado derecho, por ejemplo en los dos planteados:

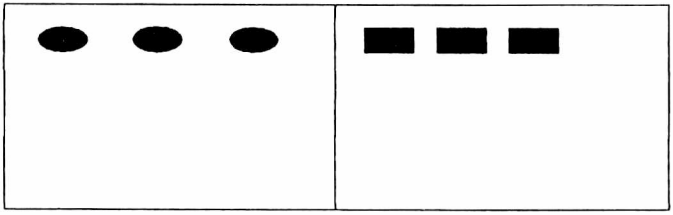
3x + 2 - 2 = 5 - 2



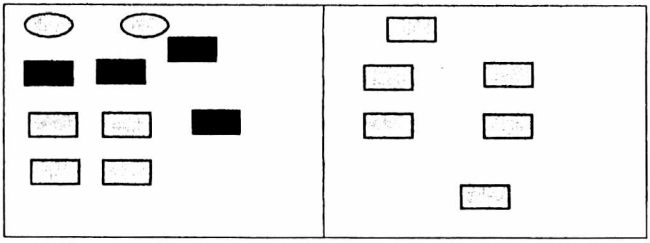
Quedando el tablero equivalente:

3x = 3

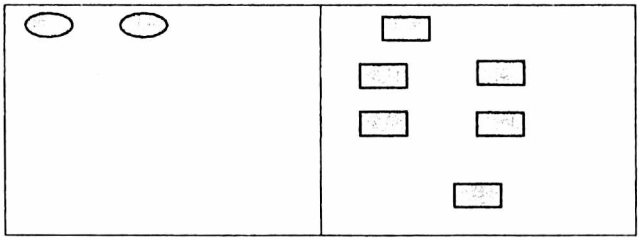
x = 1



O en el segundo ejemplo:

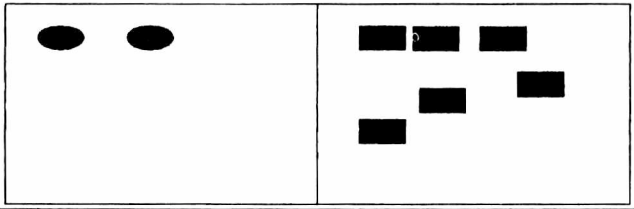


-2x + 4 - 4 = -6



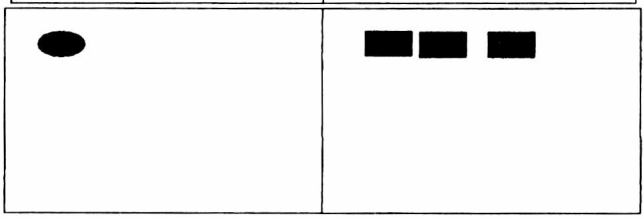
-2x = -6

Lo que equivale:



2x = 6

O:



X = 3

Ahora trata por turno de reproducir en los tableros y luego resolverlas siguientes ecuaciones:

1) 2x + 4 = 6
2) 2x - x = 7
3) –x + 3 = -2
4) 5x - 2 = 3
5) –x + 3 = 1 + x - 1
6) –x + 2 = x + 3 - 4

Comentario:

- Surgen algunas propiedades del modelo después de haber manipulado y jugado con él.
- Se presentan casos no resolubles.
- Este modelo es útil para introducir a los alumnos en el concepto de ecuación y en la manipulación de la igualdad y resolución de ella.

IV. Pasaje de un enunciado verbal a una expresión simbólica

Conviene emplear algún método en clase para ayudar a la lectura del enunciado: lectura individual, leerlo en voz alta para toda la clase (el profesor o los alumnos), hacer que los alumnos cuenten con sus palabras lo que dice el enunciado, pedirles que se imaginen la situación...

Además de las técnicas de trabajo propuestas en las distintas actividades, se deben enseñar otras técnicas para buscar ecuaciones en el enunciado, por ejemplo, que descompongan el problema en trozos separando las distintas informaciones: aislar los datos, o subrayar en el enunciado las frases que nos pueden sugerir una ecuación o relación entre cantidades.

Con los alumnos habrá que recordar que una ecuación es una expresión algebraica en la que hay una igualdad y que, por lo tanto, para escribirla tienen que encontrar en el enunciado del problema dos cantidades o relaciones entre cantidades, conocidas o desconocidas, que sean iguales.

Es importante no usar siempre la misma letra, porque sino los alumnos llegan a pensar que la ecuación "es una igualdad donde figura la x".

Hay que hacer notar que estas igualdades se cumplen para un valor particular de la letra y no para cualquiera como en las identidades.

Propuestas al alumno:

Problema A

1) Juana tiene hoy 3 veces la edad de Lucas, ¿qué edad tiene Lucas si su mamá tiene 48 años?

2) Juana tiene ahora 48 años, ¿qué edad tiene su sobrina Ana si hace 3 años Juana la triplicaba en edad? Ayúdate completando la siguiente tabla, en el orden que desees:

Edad	Ahora	Hace 3 años
De Juana		
De Ana		

3) ¿Sigue teniendo Juana el triple de la edad que Ana?, ¿y dentro de 5 años?

4) ¿Será en algún momento la edad de Juana el doble de la de su sobrina Ana? Amplía la tabla:

Edad	Dentro de 1 año	Dentro de 2 años	Dentro de 3 años	Dentro de 4 años
De Juana				
De Ana				

5) Escribe una expresión que vincule las edades de Ana y Lucas. ¿Qué edad tiene Lucas cuando su prima tiene la edad actual?

Problema B

1) En mi casa tengo 3 cajas de casetes de distintos tamaños: grande, mediana y chica. En la mediana puedo colocar 40, en la grande 25 casetes más que en la mediana y en la chica 10 menos que en la mediana. ¿Cuántos casetes puedo guardar en total?

¿Cuántos casetes tiene cada caja?

2) Una amiga mía ha colocado también casetes en 3 cajas. El otro día le pregunté cuántos tenía y me dijo: a) que no recordaba; b) que la más chica no contenía más de 10 casetes, c) pero si sabía que en la mediana caben 15 más que en la chica y d) en la grande 20 más que en la chica. Completa la tabla para cuatro posibilidades de contenidos de las cajas:

Número de casetes				
Chica				
Mediana				
Grande				
Total				

3) Mi amiga me dijo que pensaba que debía tener 55 casetes en total, ¿Estará en lo cierto?, ¿por qué?

4) Al contarlos descubrimos que se había equivocado en una unidad. ¿Cuál será entonces la cantidad total de casetes y cuál la de cada caja?

5) Si la caja contiene en total hasta 105 casetes y se plantearan las mismas preguntas, te sería útil encontrar una expresión general que relacione el total con esa cantidad, ¿cuál es?

Comentarios:

- En estas actividades se pretende solamente la traducción de expresiones escritas en lenguaje corriente a expresiones algebraicas.
- Son problemas cuyo propósito es desarrollar el pensamiento algebraico.
- Cuando sea posible se aconseja que los valores de algunas de las variables que intervienen en los problemas se cambien, y se calculen. Esto contribuye a formar el concepto de variable.
- Se proponen traducciones que empezando por variables aisladas se compliquen después, proponiendo relaciones de: doble, triple, quitar, añadir, restar, sumar, etc; aisladas o combinadas y presentadas en distintos contextos: edades, tiempos, números de casetes, etc.
- Se pretende que respondan:

Problema A

1) J = 3L
   48 años = 3L
   48 años : 3 = 3L : 3
   16 años = 1L

2)

Edad	Ahora	Hace 3 años
De Juana	48	45
De Ana	18	15

3) No, ya que:
   J = 48 años + 5 años = 53 años
   A = 18 años + 5 años = 23 años

4)

Edad	Dentro de 1 año	Dentro de 2 años	Dentro de 12 años	Dentro de 32 años
De Juana	49	50	60	80
De Ana	19	20	30	50

Como se aprecia en la tabla ocurre a los 12 años de ese momento, cuando Juana tiene 60 años y su sobrina Ana 30 años.

También se podría preguntar cuándo Juana tendrá el triple de la edad de Ana.

5) La edad de Lucas en función de la de Ana hoy día sería:

$$L = A - 2\text{años}$$

Problema B

1) $M = 40$ cas.

$G = M + 25\,c = 65c$

$CH = M - 10c = 30c$

2)

Chica	9	8	7	6
Mediana	24	23	22	21
Grande	29	28	27	26
Total	62	59	56	53

3) No, no puede ser, el más cercano a ese número es 56.

4) Si en total tiene 56 casetes, en la chica tendrá 7, en la mediana 22 y en la grande 27.

5) $CH + 15c + CH + 20c + CH = 105c$

$3CH + 35c = 105c$

$3CH + 35c - 35c = 105c - 35c$

$3CH = 60c$

$3CH : 3 = 60c : 3$

$CH = 20c$

Luego las demás cajas tendrán: $M = 35c$; $G = 40c$ y en total 135 casetes.

4.2 Álgebra funcional

4.2.1 ¿Qué opinan los especialistas?

En el momento que Freudenthal caracterizó las funciones (1973, 1982)[2], enfatizó la noción de "dependencia" de esta manera:

"Nuestro mundo no es un sistema relacional clasificado, es un

2. En su conferencia sobre "Variables y Funciones".

reino de cambio, de objetos variables, dependientes unos de otros, las funciones son una clase especial de tales dependencias: aquella que se da entre variables que son dependientes e independientes."

Verstappen (1982)[3] distingue tres categorías para recordar relaciones funcionales utilizando lenguaje matemático:

- Geométricas-esquemas: diagramas, histogramas, gráficas, dibujos.
- Aritmética-números: tablas, pares ordenados.
- Algebraica-letras y símbolos: fórmulas y correspondencias.

En las clases de álgebra los alumnos hacen distintas relaciones entre variables y por ello recurren a diagramas, ecuaciones y tablas. Estas representaciones se extienden a la utilización de gráficas cartesianas, por lo tanto la enseñanza de funciones incluye representaciones que denotan niveles procedimentales y estructurales. Sin embargo, los estudiantes tienden a eludir las definiciones y representaciones más formales y a interpretar las funciones como procedimientos para obtener una magnitud por medio de otra.

Las funciones se presentan en las clases de ciencia, pero siempre como una dependencia entre variables. Hay algunos estudios (como los de Markovitz, Eylon y Bruckheimer, 1983) que muestran que los alumnos están expuestos a dos definiciones distintas de funciones, una dada en las clases de ciencias y otra dada en las clases de matemática.

Estas investigaciones vieron el efecto del contexto (Matemática vs Ciencias), en los resultados de ejercicios que requerían que los alumnos realizaran la gráfica de una función, que podría pasar a través de puntos no colineales en el plano cartesiano.

Este grupo encontró que:

- Sin importar la naturaleza de la pregunta hay tres tipos de funciones que causan dificultades: la función constante, las funciones definidas por trozos y las funciones que se representan por medio de un conjunto discreto de puntos.
- Existe un desprecio general por el dominio e imagen, aun si se exige atención mediante una pregunta explícita.
- La variedad de ejemplos del repertorio de funciones del alumno está limitada, tanto gráfica como algebraicamente, siendo más pobre en la última.

---

3. En sus reflexiones en la Introducción de Relaciones y Funciones.

• La transferencia de la forma gráfica a la algebraica es más difícil que la transferencia inversa, y ambos procesos están limitados por el limitado repertorio de funciones.

• Cuando se requería ejemplos de funciones, había una excesiva adherencia a la linealidad.

De la opinión de los especialistas que investigaron el tema, se pueden desprender algunos enfoques a tener cuenta: 1) cualitativo, 2) cuantitativo y 3) modelo matemático de la recta.

4.2.2 Cualitativo o global

Se pretende en este apartado una interpretación global, no cuantitativa de expresar relaciones entre magnitudes en forma: gráfica, tablas y expresiones verbales, para luego cuantificar las relaciones.

En todo momento se trata de estudiar gráficas que respondan a hechos concretos y se debe apuntar a diferenciar el concepto de "gráfica" del de "dibujo".

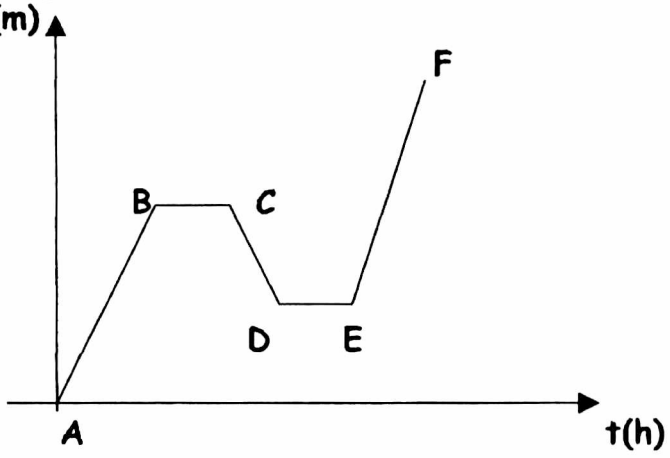
Se proponen algunas actividades que apuntan a trabajar este aspecto y fueron seleccionadas por considerarlas con alguna particularidad.

4.2.2.1 Algunos problemas interesantes

I. Interpretación cualitativa de la gráfica

Propuesta al alumno:

La gráfica siguiente describe lo sucedido en una excursión escolar:



Observa e indica:

¿Estuvieron detenidos en algún momento?, ¿cuándo?

¿Fueron más rápido en algún período?, ¿cuál?

¿Retrocedieron en algún momento?, ¿cuál?

Expresa con tus palabras un relato de la excursión a lo largo de todo el tiempo transcurrido.

Comentario:

Con esta actividad se pretende introducir el lenguaje gráfico como forma de expresar la variación de una magnitud respecto de la otra.

Es importante recalcar que la lectura de los ejes es fundamental en la interpretación de la gráfica.

El hecho de no tener números marcados sobre los ejes, puede ser una dificultad para el alumno, pero es preferible empezar por la interpretación cualitativa entre dos magnitudes.

La interpretación de los tramos horizontales es un tema que puede ser conflictivo.

El tramo que se retrocedió puede complicar la comprensión o el análisis de cuál es más veloz.

Es importante transmitir que el gráfico nos permite averiguar mucha información y que es una manera de comunicación sencilla y cómoda.

Sería deseable que los alumnos se familiaricen con la forma de relatar un fenómeno viendo su gráfica.

II. Graficar un enunciado

Propuesta al alumno:

Realiza un gráfico cartesiano para expresar como varía la temperatura de tu casa a lo largo del día en un día de invierno. En el eje horizontal coloca el tiempo en horas y en el vertical la temperatura en grados centígrados.

Comentario:

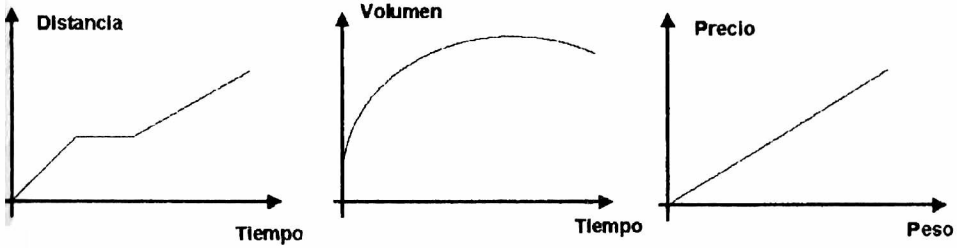
Se pretende que los alumnos reconozcan en una información verbal las magnitudes que varían en forma cualitativa.

Se trata de pasar del lenguaje verbal al gráfico.

III. Enunciar un gráfico

Propuesta al alumno:

Para cada una de ellas escribe un posible texto que corresponda a cada representación gráfica:



Comentario:

Se pretende que los alumnos logren pasar del lenguaje gráfico al lenguaje corriente. Para lograrlo es necesario que lean los ejes, identifiquen cuáles son las variables dependientes de las independientes, y puedan relatar cómo varía una respecto de la otra.

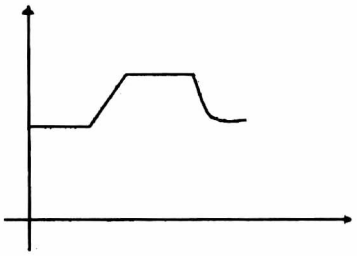
Aunque parezca simple, a los alumnos les cuesta mucho este procedimiento, de poder componer un texto a partir de la lectura del gráfico. Una vez logrado es de gran utilidad y es simple la interpretación visual del gráfico cartesiano.

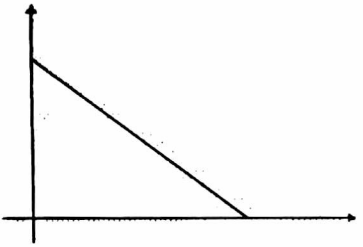
La primera gráfica puede andar bien para describir un paseo de algo, la segunda puede ser algo que se infla (neumático, pelota, globo), la tercera para cualquier compra.

IV. Dado enunciados y gráficas, asociarlos

Propuesta al alumno:

Dados los siguientes gráficos y enunciados, trata de asociar la gráfica que se adecue a los enunciado siguientes:





a) ¿Cómo varía la altura de una persona a lo largo de la vida?

b) ¿Cómo varía la altura de una vela a lo largo del tiempo que está encendida?

c) Un camión lleno de papas va descargando poco a poco, pero al final tiene que descargar más rápido, hasta que se queda vacío. ¿Cómo varía la cantidad de papas que queda en el camión durante el tiempo que tarda en descargar?

d) A media mañana se enciende la calefacción de una casa y está encendida hasta la tarde. ¿Cómo varía la temperatura de la casa a lo largo de todo el día?

Comentario:

Se pretende que seleccione el gráfico más adecuado al enunciado.

Una vez seleccionado éste, es importante que asignen magnitudes a los ejes de las gráficas correspondientes.

El a) podría corresponder al segundo y tercer gráfico.

El b) podría corresponder al primer y cuarto gráfico.

El c) podría corresponder al primer gráfico.

El d) podría corresponder al tercer gráfico.

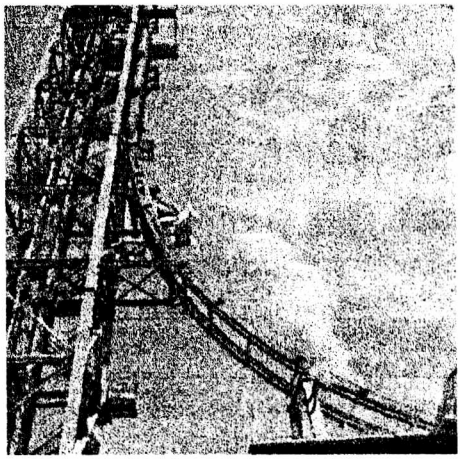
Deben manejar en forma intuitiva la variación de una magnitud en función de otra.

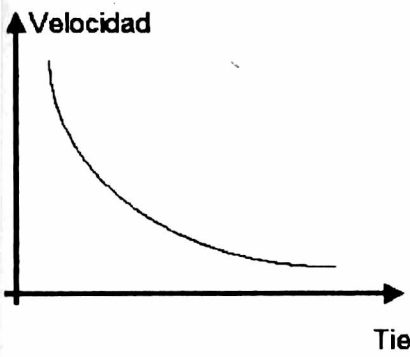
Se podrían proponer otros gráficos alternativos para cada uno de los enunciados.

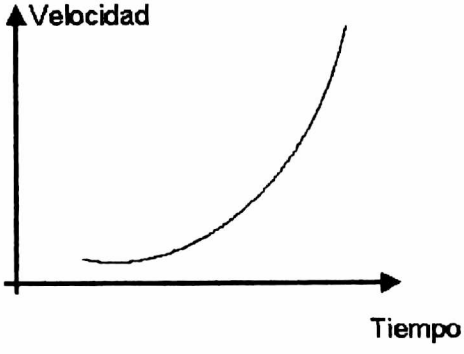
V. Gráficas vs. trayectorias

Propuestas al Alumno:

En una montaña rusa como la del dibujo, ¿qué sucede con la velocidad a medida que desciende el carrito?, ¿a cuál de las gráficas corresponde?







Comentario:

Se pretende poner de manifiesto la diferencia entre los gráficos temporales (en función del tiempo) y la trayectoria del móvil.

Es frecuente que los alumnos las confundan y que respondan que el primer gráfico es el que responde a la realidad cuando lo que está ocurriendo es que la velocidad aumenta a lo largo del tiempo, por efecto de la aceleración de la gravedad y por lo tanto es el segundo gráfico el adecuado para describir la realidad.

Se podría proponer que realizaran un gráfico de la distancia recorrida en función del tiempo y hacer notar la diferencia con la gráfica de la de velocidad en función del tiempo.

Recalcar que el dibujo es una forma de lenguaje que da información ilustrativa, mientras que la gráfica relaciona variaciones de magnitudes.

4.2.3 Cuantitativas

En este apartado se pretende introducir el estudio cuantitativo de la relación de una magnitud numérica en formas de: gráficas, tablas y expresiones verbales.

Para estudiar cuantitativamente las gráficas es necesario hacer divisiones en los ejes; los alumnos deben realizar, según el contexto las divisiones más adecuadas en cada eje y observar cómo influyen estas divisiones en la gráfica.

Un tema conflictivo es el análisis de si se deben unir o no los puntos de la gráfica y acá el docente podrá decidir, de acuerdo con el nivel del curso, si es conveniente o no la introducción de magnitudes discretas.

La lectura cuantitativa debe comenzar con la pregunta por los distintos valores que se pueden leer directamente en la representación o hacer una estimación sobre la gráfica.

Los análisis de continuidad, crecimiento, se podrán hacer en forma intuitiva y sobre ejemplos concretos, dados con enunciados, tablas o gráficos.

Para analizar el dominio y la imagen, como conjunto de valores que toma cada variable no es necesario introducir ninguna terminología especial.

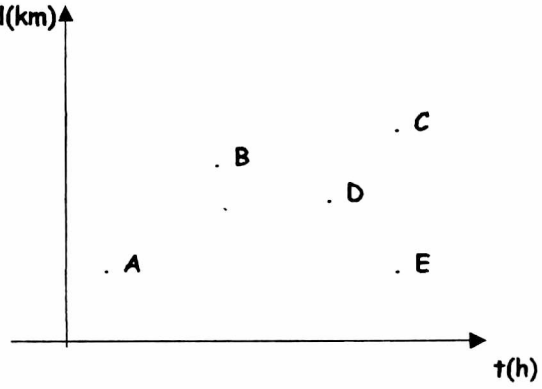
Se pueden proponer las siguientes actividades, con particularidades que se analizan a continuación.

4.2.3.1 Algunos problemas interesantes

I. Interpretar puntos y ordenarlos

Propuesta al alumno:

En el gráfico están representados los trayectos alcanzados por distintos micros a lo largo de un cierto tiempo:



a) ¿Qué micros emplean menos tiempo en hacer el trayecto?
b) ¿Hay algunos que emplean el mismo tiempo?, ¿cuáles?
c) ¿Qué micros recorren la misma distancia?, ¿cuáles?
d) ¿Qué micros recorren la mayor distancia?
e) ¿Cuál micro es más veloz, el A o el B?
f) ¿Qué ocurre con los C y E?
g) Ordena los micros con respecto al tiempo empleado.
h) Ordena los micros de acuerdo con la distancia recorrida.
i) Marca sobre el gráfico un micro F, que sea más rápido que E.

Comentario:

Si bien se trata de la interpretación de un gráfico en forma cuantitativa, es bueno que comparen magnitudes de mayor o menor, sin que por ello signifiquen la lectura de números para esas magnitudes.

Las respuestas del a) y b) sirven para ordenarlos con respecto al tiempo y la c) y d), con respecto a la distancia.

En e) es importante que observen cómo a igual distancia el E tardó más tiempo en lograrlo.

En f) se podrá notar que para el mismo tiempo el C alcanzó más distancia que el E.

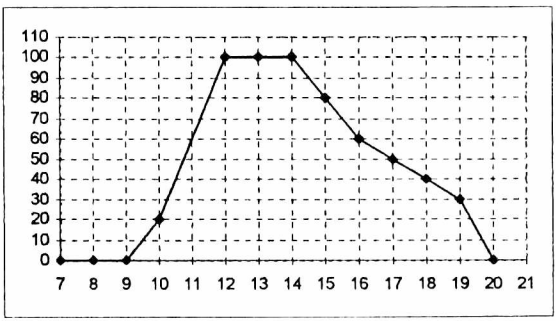
En g) y h) se trata de que ordenen de menor a mayor los datos de tiempo y de distancia.

En i) se puede colocar el punto F a igual tiempo y C y E para una distancia mayor que ellos.

II. Interpretar puntos en una gráfica

Propuesta al alumno:

Un grupo de amigos decide hacer una excursión en bicicleta hacia un lago que está a 100 km de allí. Para llegar al lago deben realizar un camino como se indica en el gráfico (en el eje horizontal está indicado el tiempo en horas y en el vertical la distancia en km):



a) ¿A qué hora parte la excursión?
b) ¿A qué hora llegan al lago?
c) ¿Cuánto tiempo están en el lago?
d) ¿Cuánto tardaron en ir del pueblo al lago?
e) ¿Cuánto tardaron en ir del lago al pueblo?
f) ¿A qué atribuyes la diferencia?

Comentario:

En esta actividad se introduce la lectura numérica de una gráfica con la lectura de puntos.

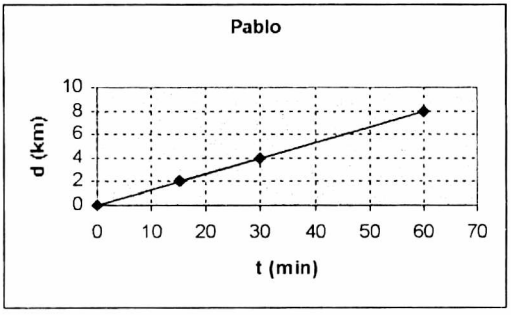
El error frecuente que tienen los alumnos es que confunden distancia con altura, ya que suelen manifestar "bajan del lago". Esto puede surgir de la distancia que leen en sentido vertical y tienden a relacionarlo dibujo con gráfica. Una vez más es necesario trabajarlo, ya que es un tema difícil, porque es antinatural.

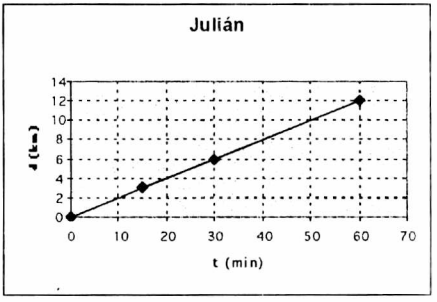
Las soluciones pretendidas son: a) 9h; b) 12h; c) 2h; d) 3h; e) 6h y en f) es abierta la respuesta: están cansados, estaban paseando, etc.

III. Elegir la escala adecuada

Propuesta al alumno:

Pablo y Julián entrenan para una competencia intercolegial y después de una hora de entrenamiento, llegan a las siguientes gráficas:





a) ¿Cuál fue más veloz? Explica por qué.
b) Realiza una tabla para distintos valores tiempo y distancia.
c) Con esos datos, ¿qué puedes concluir?

Comentario:

Se pretende que presten atención a la importancia que tienen las lecturas de las escalas de los ejes, para poder decidir las lecturas correctas.

A veces el golpe de vista no basta; es necesario que observen las unidades y divisiones que tiene cada eje para que las conclusiones sean las correctas.

La pregunta b) los lleva a cuantificar en una tabla y poder corroborar o no las afirmaciones dadas en a).

Se les puede proponer a los alumnos que busquen gráficas en los diarios, que puedan llevar a engaños en la apreciación inadecuada de las variables, por ejemplo en los gráficos del sector económico.

IV. Representación gráfica de una tabla

Propuesta al alumno:

Un estudio de un ginecólogo muestra cómo crece un bebé antes de nacer, según el mes de gestación en que se encuentra su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	10	15	25	30	34	40	45

a) Representa esta tabla poniendo la edad en el eje horizontal y la longitud en el vertical.

b) ¿Se pueden unir todos los puntos marcados?, ¿por qué?

c) ¿Puedes estimar la longitud que tendrá a los 15 meses, es decir a los 6 meses de nacido?

d) ¿Qué tiempo tendrá el bebé cuando tenga 26 cm de longitud?

Comentario:

En esta actividad se pretende que hagan una gráfica con la representación de puntos dados en una tabla.

Se les indica que consideren en el eje horizontal el tiempo, para que todos hagan una gráfica similar y porque en ciencias es común que se relacionen distintas magnitudes con respecto al tiempo.

En la pregunta b), es positiva la respuesta. Habrá alumnos que contestan que no porque no se conocen los puntos intermedios (magnitudes discretas).

La pregunta c) es útil para hacer ver que no se trata de magnitudes directamente proporcionales, ya que la naturaleza no se presenta de esa manera en la generalidad de los casos.

La pregunta d) podrá estimarse entre los tres y los seis meses de gestación.

V. Decidir gráficas y escalas para una experiencia

Material:

Termo y termómetro de laboratorio (mayor escala).

Propuesta al alumno:

Introduce agua caliente en el termo y coloca el termómetro de tal manera que puedas leer su escala sin sacarlo al exterior.

Mide la temperatura del agua cada 10 minutos y anota en una tabla estas medidas.

Representa gráficamente esta tabla, utilizando el eje horizontal para el tiempo.

Señala los períodos de crecimiento-decrecimiento de la gráfica que obtuviste e interprétala.

Comentario:

Se trata de abordar aspectos de observación de fenómenos de la naturaleza, recoger datos y organizarlos en una tabla, representarlos gráficamente y trazar la gráfica que más se aproxime; y a partir de ella, predecir valores que no se han recogido experimentalmente.

Se podrían proponer otras actividades de experimentación, para llevar a la práctica los conceptos adquiridos de funciones, por ejemplo:

Altura de una planta surgida de una semilla, en función del tiempo de plantada.

La temperatura de una habitación en función de las horas del día.

Evolución de bacterias de una colonia (cantidad de ellas), en función de los días de evolución.

Temperatura de un horno, desde que se enciende hasta que pierde todo el calor.

Peso del agua en un recipiente, en función de los litros que contenga.

4.2.4 Modelo matemático de una recta

En la Matemática es muy útil la creación de un modelo para explicar ciertos hechos. Iniciar el estudio de modelos gráficos, mediante una recta, es útil porque es un modelo sencillo al que se pueden ajustar muchas relaciones entre dos variables.

Hay una tendencia marcada cuando se señalan puntos en un sistema de coordenadas: unirlos con tramos rectos; esto es porque el camino más corto entre dos puntos es una recta, pero no siempre se pueden unir los puntos y la línea puede no ser recta.

Observando tablas y gráficas, se decide qué tipo de gráfica se ajusta a cada tabla, calculando la tendencia de las variables o de una variable cuando la otra varía de forma constante. Si se comprueba, esto es importante para decidir con qué tipo de línea hay que unir los puntos representados y entender que la pendiente de una recta no depende de los puntos que se tomen, porque se puede hablar de pendiente de una recta en general.

El objetivo de este apartado es estudiar las relaciones, cuyas representaciones gráficas se ajustan a una recta.

Se estudiarán las rectas que representen relaciones de proporcionalidad directa y en ella se verá el concepto de pendiente y su relación con la constante de proporcionalidad y luego el concepto de pendiente en las demás rectas.

Es frecuente asociar a cualquier recta la relación de proporcionalidad y es importante que los alumnos vean que no todas las rectas corresponden a relaciones de proporcionalidad directa, y lleguen a diferenciar una de otra.

Se analizarán algunas actividades para ejemplificar lo dicho.

4.2.4.1 Algunos problemas para analizar

I. Representación de rectas

Propuesta al alumno:

Lucio quiere hacer un viaje a Brasil y concurre a una agencia de turismo; le dan los precios en dólares y quiere calcular si le alcanzarán sus pesos argentinos ahorrados para hacerlo. Se sabe que la cotización del dólar es de alrededor $3 argentinos. Los precios que le dieron en la agencia son: pasaje u$s 350 y hotel u$s 100 por día.

Completa la siguiente tabla y representa gráficamente esos valores: $ argentinos en función de dólares:

U$s	1	100	200	300	400	500	600
$ arg	3						

a) ¿Pasa por el origen de coordenadas esa recta? Explica por qué.

b) ¿Se trata de magnitudes directamente proporcionales?

c) ¿Cómo sería la fórmula que relaciona las magnitudes: pesos argentinos, con dólares?

d) Si Lucio dispone para el pasaje y la estadía de $3000, ¿cuántos días podrá quedarse?

Comentario:

- Habría que hacer notar que la gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas y por lo tanto se trata de magnitudes directamente proporcionales.
- La fórmula pedida es: $P = 3 . D$
- Se trata de magnitudes directamente proporcionales; donde 3 es la constante de proporcionalidad.
- Se podrá quedar sólo seis días.

II. ¿Son todas proporcionales?

Propuesta al alumno:

- Analiza si son directamente proporcionales las siguientes magnitudes.
- Para comprobarlo realiza una tabla con 5 valores y represéntalos gráficamente.
- Mirando las gráficas: ¿modificas las respuestas?, ¿por qué?
- Aclara cuáles de las magnitudes son proporcionales y cuáles no.
- Calcula la fórmula que corresponde a cada una de las directamente proporcionales.

Las magnitudes a analizar son:

1. El kilo de papas vale $0,75, la relación kg de papas y precio.
2. El perímetro de un cuadrado, si se conoce su lado.
3. La superficie del cuadrado, si se conoce su lado.
4. La cantidad de hojas de un árbol y su edad.
5. La altura de un árbol y su sombra.

6. La distancia recorrida por un auto y el tiempo empleado en recorrerla (a velocidad constante).
7. Número de kilo de naranjas y precio que se abona.
8. Tiempo que se tarda en hacer un trabajo y la cantidad de personas que lo realizan.

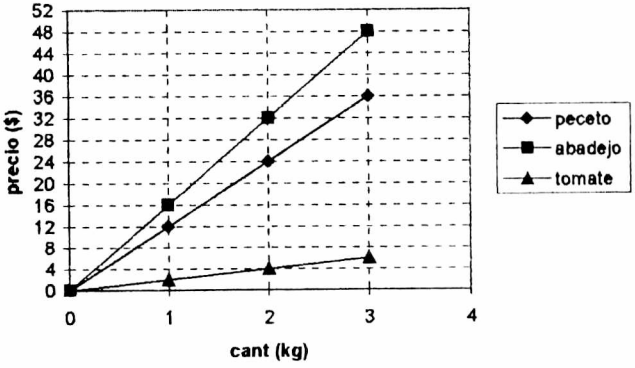
Comentario:

- Se trata de que distingan magnitudes directamente proporcionales de las que no lo son. Las gráficas pueden ayudar a razonar.
- Como no se indican valores de las variables, los gráficos obtenidos por los alumnos serán variados.
- Es importante hacer notar que la elección de las variables son arbitrarias, aunque se elijan teniendo en cuenta el contexto. También es importante la elección de las escalas.
- De las magnitudes analizadas solamente son proporcionales: 1, 2, 6 y 7.
- La 3 es una función cuadrática.
- La 4 y 5 son fenómenos naturales y, por lo tanto, no se comportan regularmente y no tienen una ecuación que las describa.
- La 8 no es directamente proporcional, sino inversamente proporcional, ya que a medida que aumentamos el número de personas para hacer el mismo trabajo, disminuye el tiempo para lograrlo.

III. ¿Cuál es la pendiente?

Propuesta al alumno:

Ana debe hacer compras y para ello consulta los precios por kilo en el supermercado, se encuentra con la sorpresa que hay un gráfico como el siguiente:



a) ¿Cuál es el precio por kilo?
b) ¿Cuánto cuestan 750g de cada producto?
c) ¿Son proporcionales?, ¿cuál está más inclinada?
d) Escribe la fórmula de las funciones respectivas.
e) ¿Cuáles son las constantes?, ¿cuáles sus pendientes?

Comentario:

- En esta actividad se representan tres rectas, que corresponden a magnitudes directamente proporcionales, con distintas inclinaciones, para relacionar la constante de proporcionalidad, con el grado de inclinación de la recta y con el coeficiente que aparece en la fórmula.
- Los precios por kilo son $12 de peceto, $16 de abadejo y $2 de tomate.
- Los precios solicitados en la parte b) son: $9, $12 y $1,50.
- Son proporcionales y sus constantes son: 12, 16 y 2.
- Luego las fórmulas: $P = 12 . x$
- $A = 16 . x$
- $T = 2 . x$

IV. ¿Son todas iguales las pendientes?

Propuesta al alumno:

Agustín quiere hacerle un regalo a su novia y se decide por unas flores, averigua los precios y le dicen: las rosas, el ramo $5, si las envía a domicilio $8 y los claveles enviados a domicilio $7. Agustín está indeciso y quiere hacer cuentas antes de resolverlo. Ayudémosle.

a) ¿Cuáles son los precios por ramo de cada opción?
b) ¿Cuáles son las fórmulas que vinculan esas opciones?
c) Si las graficara, ¿cómo serían ellas?
d) ¿Cuáles sus pendientes?
e) ¿Cómo serían estas pendientes relacionadas?

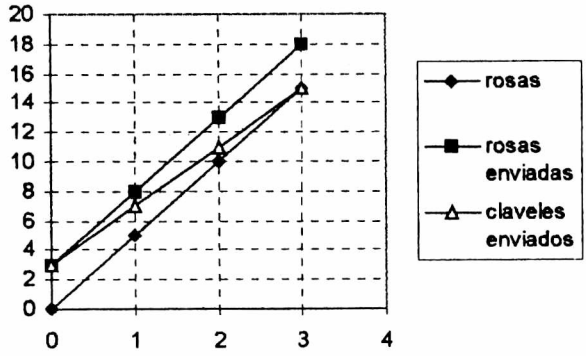
Comentario:

- Los precios por opción son en el caso de las rosas $5 y en el caso de los claveles $4, siendo el envío de $3.
- Las fórmulas de las opciones planteadas son:
  $R = 5 . x$

R env = 3 + 5 . x

CL env = 3 + 4 . x

- Las gráficas son:



- Las pendientes de las dos primeras son iguales a 5, por eso las rectas son paralelas y las ordenadas son distintas y están separadas 3, que es lo que sale el envío.
- La inclinación de la otra recta (claveles) es menor, porque es menor el precio y su pendiente.
- Las dos rectas que corresponden a enviadas no relacionan magnitudes directamente proporcionales, sólo lo es la de las rosas sin envío que corresponde a una recta que pasa por el origen. Éste es un error muy frecuente que cometen los alumnos: "Todas las representaciones gráficas rectas, se tratan de magnitudes directamente proporcionales."

V. ¿Cuál conviene?

Propuesta al alumno:

Constanza quiere tener un teléfono celular, más que nada para que la puedan llamar y para eventualmente hacer alguna llamada. Le ofrecen dos opciones: 1) libre de llamadas, $100 por mes y 2) $50 inicial y luego recargable por mes con tarjetas de $10 cada una.

a) ¿Cuál le conviene más?, justifícalo con las fórmulas de esas opciones.

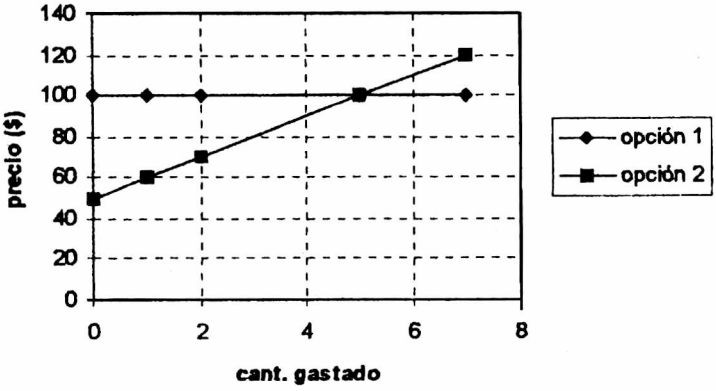
b) Representa gráficamente esas opciones.

c) Observando esa gráfica, ¿coincides en la opción realizada?

d) Saca conclusiones.

Comentario:

- En esta actividad se presentan dos situaciones cuyas gráficas se cortan en un punto y se analiza el significado de ello.
- Para calcular cuál es más conveniente, se analiza cuál es el punto de corte de ambas rectas y para los que están hacia la izquierda conviene la 2° opción y para los de la derecha la 1°.



- El punto de corte ocurre para un gasto de 5 tarjetas que sería el mismo gasto, si hablara poco conviene la opción 2 y si habla por más de 5 tarjetas conviene la opción 1.
- En el caso de Constanza creo que es más conveniente la opción 2.

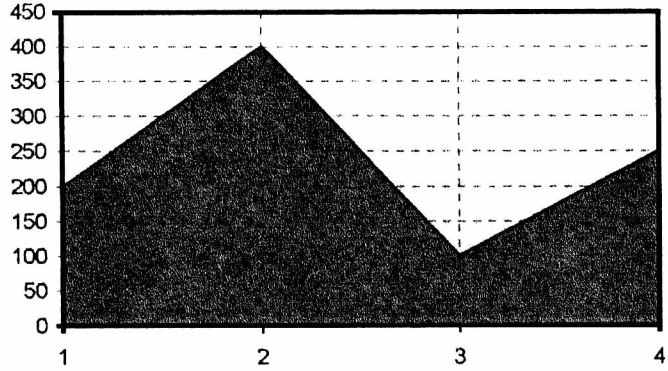
VI. ¿Qué significa una pendiente negativa?

Propuesta al alumno:

A continuación se da un croquis geográfico, donde en la horizontal se representan las distancias en kilómetros reales sobre el horizonte y en vertical se marcan altura del terreno en metros.

Unos amigos mendocinos hicieron un paseo en bicicleta, partiendo desde la confitería de la ciudad, hasta un refugio ubicado en la montaña, luego fueron a la casa de uno de ellos que está en un valle, para terminar el paseo en el polideportivo.

Analiza el croquis:



a) Desde la confitería hasta el refugio, ¿cuál es la distancia real sobre el horizonte?, ¿cuál el desnivel?, ¿cuál la pendiente?

b) Calcula estas medidas desde el refugio a la casa.

c) Lo mismo desde la casa al polideportivo.

d) ¿Son iguales las pendientes?

e) ¿Cuáles son crecientes y cuáles decrecientes?, ¿en qué se diferencias ellas?

f) Grafica las pendientes.

Comentario:

- En esta actividad se puede plantear el interrogante del signo de las pendientes de las rectas, ya que al calcularlas como cociente de la diferencia de ordenadas, sobre la diferencia de abcisas, se obtiene una pendiente negativa en un caso (del refugio a la casa).
- Es importante recalcar una vez más que el dibujo no es una gráfica; en este dibujo la relación entre las alturas y las distancias horizontales coinciden.
- Los datos solicitados en a) son: Dist. Horiz. = 1 km; Alt. = 200 m; Pend. = 0,2
- En b): Dist. Horiz. = 1 km; Alt. = -300 m; Pend. = -0,3.
- En c): Dist. Horiz. = 1 km; Alt. = 150 m; Pend. = 0,15.
- Es importante analizar el crecimiento-decrecimiento, en forma intuitiva y señalar en qué casos es negativo.
- Algunos alumnos manifiestan al discutir crecimiento, que el primer tramo (confitería- refugio) es negativo, porque el ciclista hace un esfuerzo en subir y "si cuesta más es negativo".

Índice

1. Marco teórico 7
   1.1 ¿Qué intenta Didáctica de las Matemáticas? 7
   1.2 ¿Qué dicen las teorías epistemológicas? 8
   1.3 ¿Necesitamos los profesores de Matemática conocer las teorías del Aprendizaje? 10
   1.4 Analicemos dos modelos 11
      1.4.1 Modelo conductista 11
      1.4.2 Modelo cognitivo 15
   1.5 A la vista de los modelos, ¿qué hacemos los profesores? . 18
   1.6 Algunas ideas para aplicar 19
   1.7 Resolución de problemas 22
   1.8 ¿Y el currículum? 24

2. Curiosidades Geométricas 27
   2.1 Introducción 27
   2.2 Enseñanza de la Geometría en el primer ciclo 28
      2.2.1 Algunas ideas, actividades y problemas del primer ciclo (no secuenciadas) 29
   2.3 La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo 34
      2.3.1 Algunas ideas, actividades y problemas del segundo ciclo (no secuenciadas) 34
   2.4 La enseñanza de la Geometría en el tercer ciclo 47
      2.4.1 Algunas ideas, actividades y problemas del tercer ciclo (no secuenciadas) 48

3. De la Aritmética al Álgebra 73
   3.1 Introducción 73
   3.2 Estadios del pensamiento Lógico 74
   3.3 ¿Cómo intervienen en la enseñanza del Álgebra estos estadios? 78
   3.4 Enseñanza-aprendizaje del Álgebra 80
   3.5 Distintos Lenguajes para la enseñanza- Aprendizaje del Álgebra 81
   3.6 Utilización del lenguaje aritmético (pre-algebraico) 82

3.6.1 Algunas ideas, actividades y problemas (no secuenciadas) 82
3.7 Álgebra con la aritmética generalizada (letras como modelo de generalización de la aritmética) 89
3.7.1 Algunas ideas, actividades y problemas (no secuenciadas) 90

4. Inicio al Álgebra 105
4.1 Álgebra de la resolución de ecuaciones (letras como incógnitas) 105
4.1.1 ¿Qué dicen las investigaciones del aprendizaje?.. 105
4.1.2 ¿Cómo trabajamos ecuaciones? 108
4.1.3 Actividades informales 109
4.1.4 Actividades formales 112
4.2 Álgebra funcional 121
4.2.1 ¿Qué opinan los especialistas? 121
4.2.2 Cualitativo o global 123
4.2.3 Cuantitativas 128
4.2.4 Modelo matemático de una recta 133

Bibliografía 141

Este libro de terminó de imprimir en enero de 2007
en Buenos Aires Print, Anatole France 570, Saranadí,
Provincia de Buenos Aires
Tirada: 900 ejemplares